Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé :

l'espace V_3 muni d'un repère orthonormé directe $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

Norme d'un vecteur - distance entre deux points :

Soient $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace.

On a : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$.

Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal :

Soit $\vec{n}(a,b,c)$ un vecteur non nul, et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$, est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Une équation cartésienne de ce plan, s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$ ou d est un nombre réel.

Distance d'un point à un plan :

Soit (P) plan d'équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace. La distance du point A au plan (P) est : $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple :

Calculons la distance du point $A(-1,1,2)$ au plan (P) d'équation $x-2y-2z+4=0$.

On a : $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|x_A-2y_A-2z_A+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{9}}=1$. donc : $d\left(A;(P)\right)=1$

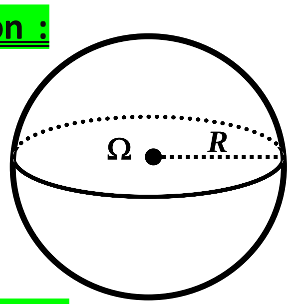
Etude analytique de la sphère :

Equation cartésienne d'une sphère définie par le centre et le rayon :

Une équation de la sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R avec $(R\succ 0)$. Est :

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ que l'on peut écrire :

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ ou $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.



Equation cartésienne d'une sphère définie par l'un de ces diamètres :

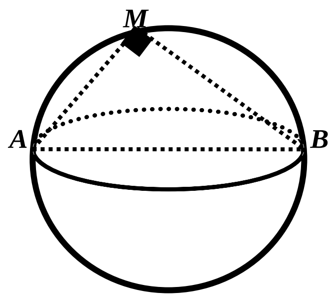
Soit A et B deux points de l'espace tel que : $(A\neq B)$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère dont $[AB]$ est l'un de ces diamètres.

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

avec $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$.



Etude de analytique de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ *et* (S) *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *de l'espace qui vérifient :* $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow x^2+ax+y^2+by+z^2+cz+d=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$$

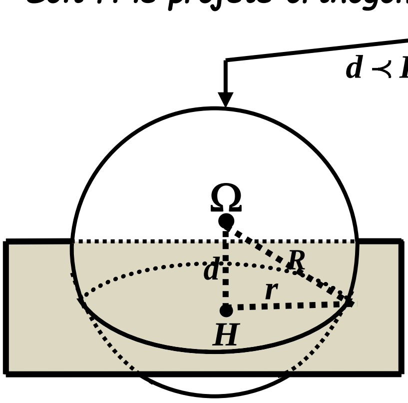
Si : $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\succ 0$: *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *est la sphère* (S) *de centre* $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ *et rayon* $R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d}$.

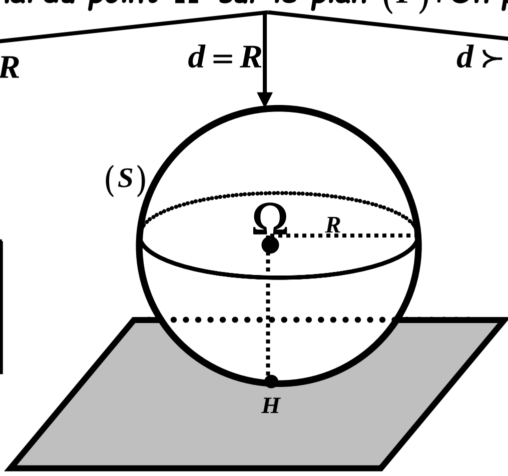
Si : $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d=0$: (S) *est l'ensemble* $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$.

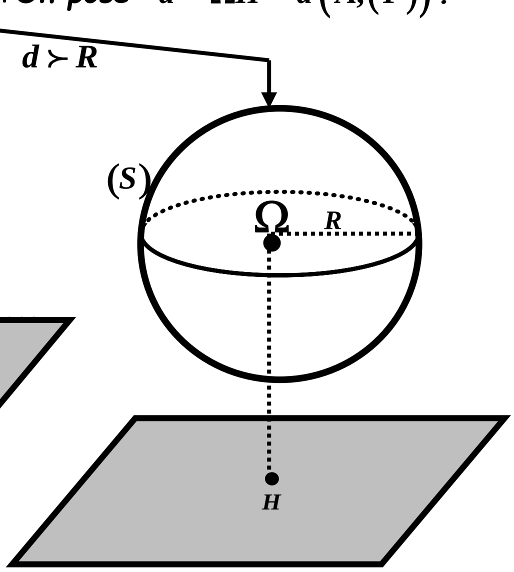
Si : $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\prec 0$: (S) *est l'ensemble vide.*

Intersection d'une sphère $S(\Omega,R)$ et un plan (P) : $ax+by+cz+d=0$:

Soit H le projeté orthogonal du point Ω *sur le plan* (P). *On pose* $d=\Omega H=d(A;(P))$.







Le *plan* (P) *coupe la sphère* (S) *suivant un cercle de centre* H *et de rayon* $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Le *plan* (P) *coupe la sphère* (S) *en un point H. On dit que* (P) *est tangent à la sphère* (S).

Le *plan* (P) *ne coupe pas la sphère* (S). *On dit que* (P) *est à l'extérieur de la sphère* (S).

Remarque :

Pour déterminer les coordonnées du point H, on résoudre le système d'équation du plan (P) *et la représentation paramétrique droite* (D), *tel que* (D) *est la droite passant par* Ω *et orthogonale au plan* (P).

Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct :

l'espace V_3 *est muni d'une base orthonormé directe* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}(x,y,z)$ *et* $\vec{v}(x',y',z')$ *deux vecteurs de l'espace.*

- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ *tel que :* $\vec{u}\perp\vec{w}$ *et* $\vec{v}\perp\vec{w}$.
- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$.
- ✓ $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.
- ✓ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ *Les points A, B et C sont alignés.*
- ✓ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$.

L'aire d'un triangle – l'aire d'un parallélogramme :

- ✓ *Soit ABC un triangle, son aire est :* $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.
- ✓ *Soit ABCD un parallélogramme, son aire est :* $S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

Distance d'un point à une droite :

Soit (D) *la droite dirigé par* $\vec{u}(a,b,c)$ *et passant par* $A(x_A,y_A,z_A)$ *et* M *un point de l'espace.*

La distance du point M et la droite (D) *est :* $d\left(M;D\left(A,\vec{u}\right)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Si les points A, B et C ne sont pas alignés, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ *est orthogonale au plan* (ABC). *Dans ce cas l'équation du plan* (ABC) *s'écrit sous la forme :*

$M\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$