

Dans tout ce qui va suivre, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Produit scalaire

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs et

$\mathbf{A}(x_A, y_A, z_A)$ et $\mathbf{B}(x_B, y_B, z_B)$ de l'espace.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme,

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{M}(x, y, z) \in P(A; \vec{n}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

La distance du point $\mathbf{A}(x_A, y_A, z_A)$ au plan (P)

d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(\mathbf{A}, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La sphère

* Soit $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R

L'équation cartésienne de la sphère $S(\Omega, R)$ est :

$$\mathbf{M}(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

* Soit (S) la sphère définie par l'un de ces diamètres [AB]

avec $\mathbf{A}(x_A, y_A, z_A)$ et $\mathbf{B}(x_B, y_B, z_B)$

$$\mathbf{M}(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \quad \text{d'équation cartésienne}$$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

Soit (S) l'ensemble des points $\mathbf{M}(x, y, z)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } a, b, c \text{ et } d$$

sont des réels.

Si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$ (S) est la sphère de centre

$$\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) \quad \text{et de rayon } \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$$

* Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R
H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P).

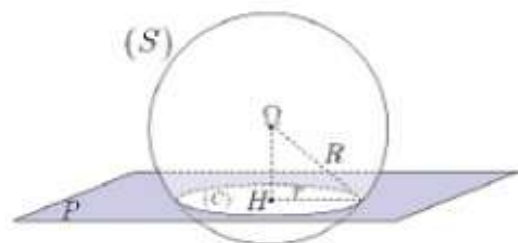
On pose $d = d(\Omega, (P))$

- Si $d > R$, alors $(P) \cap (S) = \emptyset$

- Si $d = R$, alors $(P) \cap (S) = \{H\}$ (P) est tangent à (S)

- Si $d < R$, alors $(P) \cap (S) = (\Gamma)$

(Γ) est le cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et de centre H.



Pour déterminer les coordonnées de H (résoudre le système d'équation du plan (P) et une représentation paramétrique de la droite passant par Ω et orthogonale à (P))

Equation du plan tangent à une sphère en un point

Le plan (T) tangent à la sphère $S(\Omega, R)$ en un point A

$$\mathbf{M}(x, y, z) \in (T) \Leftrightarrow \vec{AO} \cdot \vec{AM} = 0$$

* Intersection d'une sphère et d'une droite

Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R, (Δ) une droite de l'espace et H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (Δ).

On pose $d = \Omega H \quad d = d(\Omega, (\Delta))$

- Si $d > R$, alors $(\Delta) \cap (S) = \emptyset$

- Si $d = R$, alors $(\Delta) \cap (S) = \{H\}$ (Δ) est tangent à (S) en H

- Si $d < R$, alors la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

Pour déterminer les coordonnées des deux points ou de H (résoudre le système d'équation la sphère (S) et d'une représentation paramétrique de la droite (Δ))

Produit vectoriel

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Le plan (ABC) défini par A, B et C non alignés

$$\mathbf{M}(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

A, B et C ne sont pas alignés $\Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$

La distance du point A à la droite $\Delta(\mathbf{B}, \vec{u})$

$$d(\mathbf{A}, (\Delta)) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

La surface du triangle ABC et de parallélogramme ABCD

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \quad S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

(P) et (P') deux plans dans l'espace \vec{n} et \vec{n}' deux vecteurs normaux respectivement à (P) et (P')

$$1) (P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

$$2) (P) // (P') \Leftrightarrow \vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$$

3) $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0} \Leftrightarrow (P) \cap (P') = D(\vec{n} \wedge \vec{n}')$ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite (D)

4) $(P) \perp D'(\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{n} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ \vec{u} est un vecteur directeur de la droite (D')

$$5) (P) // D'(\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$