CONTINUITE - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq 2 \\ 5-x & si \quad x>2 \end{cases}$

f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Mêmes questions avec : $f(x)=\begin{cases} -2x-3 \ pour \ x\leq -1 \\ x \ pour \ -1<x\leq 1 \\ -3x \ pour \ x>1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°2.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<0 \\ x-1 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x\neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

3) Quelle valeur de a faut-il choisir pour que la fonction définie par :

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si} \quad x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[\\ a \quad \text{si} \quad x=0 \end{cases}$ soit continue en 0 ?

Exercice n°3.

Le tarif ci-contre définit la fonction "tarifs postaux économiques" qui, au poids x exprimé en grammes, associe le tarif d'affranchissement exprimé en euros. Représentez graphiquement cette fonction et indiquez ses points de discontinuité

Poids en grammes
Jusqu'à :
20
50
100
250

Exercice n°4.

On considère un système d'imposition continu à 4 tranches telles que le contribuable paye :

- 0 % d'imposition sur les 8000 premiers euros de salaire
- 10 % d'imposition sur la tranche 8000 - 20000 euros de salaire
- 25 % d'imposition sur la tranche 20000 - 50000 euros de salaire
- 40 % d'imposition au delà de 50000 euros

1) Donner l'expression de la fonction f qui à tout revenu x associe l'impôt $f(x)$ correspondant

2) Dans un repère dont les unités seront judicieusement choisies, donner une représentation graphique de la fonction f.

3) Un contribuable déclare 30000 euros. Donner son impôt arrondi à l'euro près

4) Estimer le revenu annuel (arrondi à l'euro près) d'un contribuable dont l'impôt annuel est de 5000 euros.

Exercice n°5.

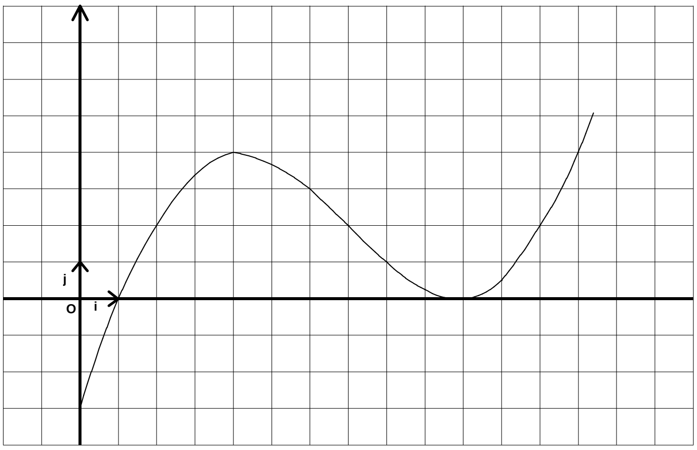
Soit f une fonction définie et continue sur [-3;4] dont le tableau de variations est :

x	-3		0		1		3		4
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↘	-3	↗	1

1) Dénombrer, sans justifier, les solutions des équations suivantes :

a) $f(x)=3$ **b)** $f(x)=0$ **c)** $f(x)=-2$

Exercice n°6.
Soit f la fonction numérique définie sur [0;14] dont la représentation graphique est :



1) Citez deux intervalles sur lesquels on peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire en expliquant pourquoi
2) Citez un intervalle sur lesquels on ne peut pas appliquer le théorème de la valeur intermédiaire en expliquant pourquoi
3) Peut-on trouver un unique nombre α tel que $f(\alpha)=6$? Si oui, explicitez pourquoi et donner un encadrement de α à l'aide de deux entiers consécutifs.
4) Même questions avec un unique nombre β tel que $f(\beta)=0$?

Exercice n°7. Le tableau ci-dessous résume les variations de f définie sur I=[-2;2] :

x	-2		0		2
$f(x)$	0	↗	2 1	↗	3

On précise que $f(0)=1$

1) Peut-on trouver $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}$?

2) Peut-on trouver $\beta \in I$ tel que $f(\beta)=0{,}1$?

3) Montrez qu'il existe γ unique, $\gamma \in [0;2]$, tel que $f(\gamma)=2{,}5$

Exercice n°8.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-1200x-100$
1) Etudier le sens de variation de g (+limites) et dresser son tableau de variation.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [20 ; 40]. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

Exercice n°9. **Deux méthodes de résolution**
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-30x^2+112$
Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
Première partie
1) Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions.
5) Avec la calculatrice, donner l'arrondi au dixième ou la valeur exacte de chaque solution.
6) En déduire le signe de f.
Deuxième partie
7) Calculer $f(2)$.
8) Trouver trois réels a, b et c tels que pour tout réel x : $f(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$
9) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice n°10.

Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

CONTINUITE - CORRECTION

Exercice n°1

1) Sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$, (c'est-à-dire en dehors du point 2), *f* est continue puisqu'elle est définie à l'aide d'une fonction polynôme et d'une fonction affine

Pour examiner la continuité en 2, on détermine $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2-1=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 5-x=3$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=f(2)$, on conclut que la fonction *f* est continue en 2

2) Sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$, (c'est-à-dire en dehors des points –1 et 1), *f* est continue puisqu'elle est définie à l'aide de fontions affines.

Pour examiner la continuité en -1, on détermine $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} -2x-3=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} x=-1$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$, on conclut que la fonction *f* est continue en -1

Pour examiner la continuité en 1, on détermine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} -3x=-3$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, on conclut que la fonction *f* n'est pas continue en 1

Exercice n°2

1) f est continue sur $]-\infty;0[$ en tant que fonction polynôme et sur $[0;+\infty[$ en tant que fonction affine. Reste à examiner la continuité en zéro. On examine $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1=-1$. Ces deux limites étant égales et égales à $f(0)=0-1=-1$, $\boxed{\text{la fonction est continue en 0, donc sur } \mathbb{R}}$

f est dérivable sur $]-\infty;0[$ en tant que fonction polynôme et sur $[0;+\infty[$ en tant que fonction affine. Reste à examiner la dérivabilité en zéro.

Pour tout $x\in]-\infty;0[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^2-1-(-1)}{x}=x$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ donc *f* est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0$. De plus, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x-1-(-1)}{x}=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ donc *f* est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$. Mais comme $f'_g(0)\neq f'_d(0)$, on conclut que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 0}}$

2) f est continue sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Il reste à examiner la continuité en 2. Pour tout $x\neq 2$, $\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$, donc $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} x+1=3=f(2)$. $\boxed{\text{La fonction est continue en 2, donc sur } \mathbb{R}}$

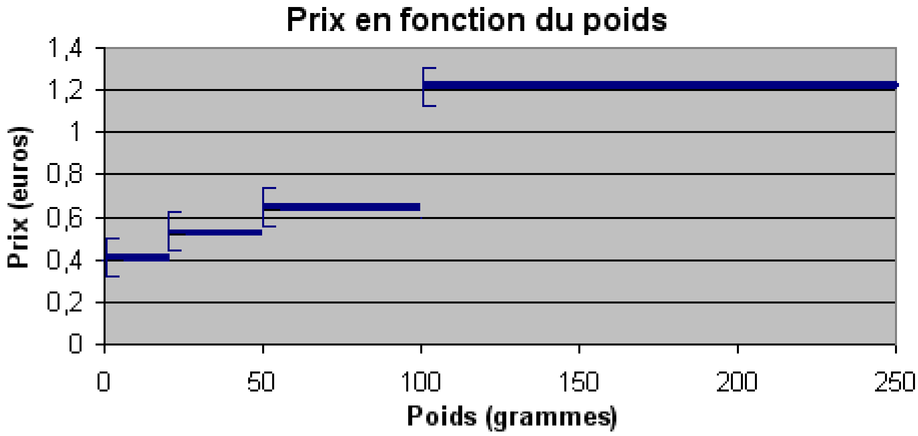
3) f sera continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$. Il faut donc déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ En posant $g(x)=\sqrt{1+x}$, on reconnaît un taux d'accroissement : $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$, dont la limite en 0 est donc égale à $g'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+0}}=\dfrac{1}{2}$. $\boxed{f \text{ sera continue en 0 si et seulement si } a=\dfrac{1}{2}}$

Exercice n°3

La fonction *f* qui, au poids *x* exprimé en grammes, associe le tarif d'affranchissement exprimé en euros, est définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0,41 \text{ si } x\in[0;20]\\ 0,53 \text{ si } x\in]20:50]\\ 0,64 \text{ si } x\in]50:100]\\ 1,22 \text{ si } x\in]100:250]\end{cases}.$$

Il s'agit d'une fonction en escalier dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



La fonction présente des points de discontinuité en 20,50 et 100

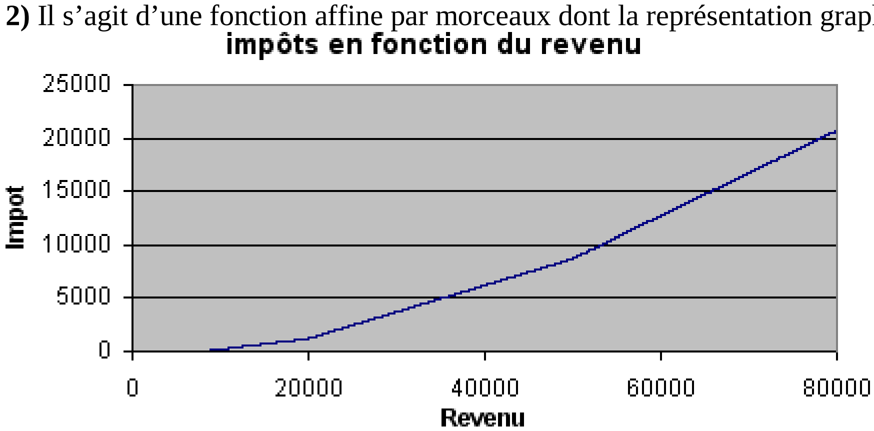
En effet, puisque , puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 20\\ x<20}} f(x)=20$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 20\\ x>20}} f(x)=50$, on aura $\lim\limits_{\substack{x\to 20\\ x<20}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 20\\ x>20}} f(x)$

Exercice n°4

1) La fonction *f* qui, à tout revenu *x* associe l'impôt *f*(*x*) exprimé en euros correspondant, est définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in[0;8000[\\ 0,1(x-8000)=0,1x-800 \text{ si } x\in[8000;20000[\\ 0,25(x-20000)+\underbrace{0,1\times 12000}_{\text{première tranche complète}}=0,25x-3800 \text{ si } x\in[20000;50000[\\ 0,4(x-50000)+\underbrace{0,1\times 12000}_{\text{première tranche complète}}+\underbrace{0,25\times 30000}_{\text{première tranche complète}}=0,4x-11300 \text{ si } x\in[50000;+\infty[\end{cases}$$

2) Il s'agit d'une fonction affine par morceaux dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



3) Si le contribuable déclare 30000 euros, son impôt sera égal à $f(30000)=0,25\times 30000-3800=3700$ €

4) Si le contribuable paye 5000 € d'impôts, son revenu se trouve dans la tranche $[20000;50000[$. En résolvant l'équation $0,25x-3800=5000 \Leftrightarrow x=\dfrac{5000+3800}{0,25}=35200$, on déduit que le revenu du contribuable est environ égal à 35200 € annuel.

Exercice n°5

L’équation $f(x)=3$ admet 2 solutions, l’une dans l’intervalle [-3 ;0], l’autre dans l’intervalle [0 ;3]

L’équation $f(x)=0$ admet 2 solutions, l’une dans l’intervalle [0 ;3], l’autre dans l’intervalle [3 ;4]

L’équation $f(x)=-2$ admet 2 solutions, l’une dans l’intervalle [0 ;3], l’autre dans l’intervalle [3 ;4]

Exercice n°6

1) On peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire par exemple sur l’intervalle [0 ;4] car la fonction y est continue et strictement croissante. De même on peut appliquer ce théorème sur l’intervalle [4 ;10]

2) On ne peut pas appliquer le théorème de la valeur intermédiaire sur l’intervalle [0 ;10] car la fonction n’y est pas strictement monotone.

3) Sur l’intervalle [10 ;14], f est continue et strictement croissante. De plus $f(10)=0$ et $f(14)=7$. Comme $6\in\left[f(10);f(14)\right]$, il existe un unique nombre α tel que $f(\alpha)=6$. Puisque $f(13)<6$ et $f(14)>6$, on en conclut que $13<\alpha<14$

4) Il n’existe par de nombre unique β tel que $f(\beta)=0$ sur l’intervalle [0,14], car f n’y est pas monotone. En revanche, c’est le cas sur l’intervalle [0 ;4] (on lit exactement $\beta=1$)

Exercice n°7

f présente une discontinuité en 0

1) On ne peut pas trouver $\alpha\in I$ tel que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}$ car $\dfrac{3}{2}$ n’est pas une valeur prise par f

2) Sur l’intervalle [-2 ;0[, f est continue et strictement croissante. Puisque $0{,}1\in\left[f(-2);\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)\right[$, il existe un unique nombre $\beta\in I$ tel que $f(\beta)=0{,}1$

3) Sur l’intervalle [0 ;2], f est continue et strictement croissante. Puisque $2{,}5\in\left[f(0);f(2)\right]$, il existe un unique nombre $\gamma\in[0;2]$, tel que $f(\gamma)=2{,}5$

Exercice n°8

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-1200x-100$

1) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel $g'(x)=3x^2-1200=3\left(x^2-400\right)=3(x-20)(x+20)$.

On en déduit successivement le signe de $g'(x)$ et le sens de variation de g :

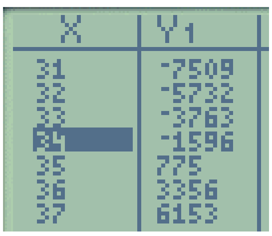
x	$-\infty$		-20		20		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	15900	↘	-16100	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$,

$g(-20)=15900$, $g(20)=-16100$

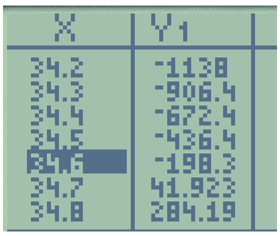
2) Sur l’intervalle [20 ; 40], g est continue et strictement croissante. De plus $g(20)=-16100<0$ et $g(40)=15900>0$

Puisque $0\in\left[g(20);g(40)\right]$, Le théorème de la valeur intermédiaire affirme l’existence d’une unique valeur $\alpha\in[20;40]$ telle que $g(\alpha)=0$. Grâce à la calculatrice, on dresse des tableaux de valeurs de plus en plus précis :



X	Y1
31	-7509
32	-5732
33	-3763
34	-1596
35	775
36	3356
37	6153

PUIS



X	Y1
34.2	-1138
34.3	-906.4
34.4	-672.4
34.5	-436.4
34.6	-198.3
34.7	41.923
34.8	284.19

nous permettant d’affirmer que $34{,}6<\alpha<34{,}7$

Exercice n°9

Première partie

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,

2) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = 3 \quad -60x = 3x(x-20)$. On en déduit que f s'annule en 0 et en 20, est strictement positive sur $]-\infty;0[\cup]20;+\infty[$ et strictement positive sur]0 ;20[.

3) Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$, strictement décroissante et [0 ;20] et strictement croissante sur $[20;+\infty[$. Puisque $f(0)=112$ et $f(20) = 20^3 - 30\times 20^2 + 112 = -3888$, son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	112	$\searrow$	-3888	$\nearrow$	$+\infty$

4) Sur l'intervalle $]-\infty;0]$, f est continue et strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0 < f(0)$, l'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution $x_1 \in]-\infty;0]$.

On procède de même sur les intervalles [0 ;20] et $[20;+\infty[$:

Sur l'intervalle [0 ;20], f est continue et strictement croissante. Comme $f(20) < 0 < f(0)$, l'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution $x_2 \in [0;20]$.

Sur l'intervalle $[20;+\infty[$, f est continue et strictement croissante. Comme $f(20) < 0 < \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, l'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution $x_3 \in [20;+\infty[$.

5) Grâce à la calculatrice, on dresse des tableaux de valeurs de plus en plus précis
ceci permet d'établir que $-1,9 < x_1 < -1,8$, puis $x_2 = 2$ et enfin $29,8 < x_3 < 29,9$

6) Le signe de f est donné par :

f étant strictement croissante sur $]-\infty;0]$, elle l'est sur $]-\infty;x_1]$, et pour tout $x \in]-\infty;x_1]$, $f(x) \leq f(x_1)$, c'est-à-dire $f(x) \leq 0$. De plus pour tout $x \in [x_1;0]$, $f(x_1) \leq f(x)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x)$

f étant strictement décroissante sur [0 ;20], elle l'est sur $[0;x_2=2]$, et pour tout $x \in [0;x_2]$, $f(x) \geq f(x_2)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$. De plus pour tout $x \in [x_2;20]$, $f(x) \leq f(x_2)$, c'est-à-dire $f(x) \leq 0$

f étant strictement croissante sur $[20;+\infty[$, elle l'est sur $[20;x_3]$, et pour tout $x \in [20;x_3]$, $f(x) \leq f(x_3)$, c'est-à-dire $f(x) \leq 0$. De plus pour tout $x \in [x_3;+\infty[$, $f(x_3) \leq f(x)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x)$

En résumé :

x	$-\infty$		x_1		$x_2 = 2$		x_3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Deuxième partie

7) On calcule $f(2) = 2^3 - 30\times 2^2 + 112 = 0$

8) Pour tout réel x, $(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

On aura alors $(x-2)(ax^2+bx+c) = f(x)$ si et seulement si pour tout réel x, $ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c = x^3-30x^2+112$, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-30 \\ c-2b=0 \\ -2c=112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-28 \\ c=-56 \end{cases}$

Ainsi, pour tout réel *x*, $f(x)=(x-2)(x^2-28x-56)$

9) On résout $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-28x-56)=0$ si et seulement si $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x^2-28x-56=0$. Pour cette dernière équation du second degré, on calcule le discriminant $\Delta=(-28)^2-4\times1\times(-56)=1008$. Comme $\Delta=\left(12\sqrt{7}\right)^2$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{28+12\sqrt{7}}{2}=14+6\sqrt{7}\approx 29,87$ à 10^{-2} près et $x_2=\dfrac{28+12\sqrt{7}}{2}=14-6\sqrt{7}\approx -1,87$ à 10^{-2} près

<u>Exercice n°10</u>

L'équation $x^3+3x=5$ étant équivalente à $x^3+3x-5=0$, on note $f(x)=x^3+3x-5$, qui est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On dérive : pour tout réel *x*, $f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)$. Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$, on en déduit $f'(x)>0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $0\in\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$.

En utilisant la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ qui nous permet d'affirmer que $1,15<\alpha<1,16$. $\boxed{\text{Une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-2} \text{ près est donc } 1,15}$