

**Exercice 1 :**

① - Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[4]{7} \times \sqrt[5]{7^4}}{(\sqrt[6]{7^5})^2} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt[4]{2048} \times \sqrt[4]{160000}}{\sqrt[8]{4096} \times \sqrt[3]{\sqrt{256} \times \sqrt{512}}}$$

② - Ordonner dans l'ordre croissant les nombres :  $A = \sqrt{2}$  ;  $B = \sqrt[3]{3}$  ;  $C = \sqrt[4]{5}$  ;  $D = 7^{\frac{1}{6}}$  et  $E = 14^{\frac{1}{12}}$ 

③ - Calculer les limites suivantes :

$$a - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x - 5}{2x^2 - 5x + 3} \quad ; \quad b - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \quad ; \quad c - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2} \quad ; \quad d - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x + 22} - 3}{x^2 - 6x + 5}$$

$$e - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x + 4} - \sqrt[3]{5x - 2}}{x - 2} \quad ; \quad f - \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x + 56} - 4} \quad ; \quad g - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x} - 1} \quad ; \quad h - \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x - 3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x - 3}}$$

$$i - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 4x + 1} - x + 3 \quad ; \quad j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3} - \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad ; \quad k - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{x}$$

$$l - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt{x + 1}}{\sqrt[4]{x + 1} - \sqrt{x + 1}} \quad ; \quad m - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2} + \sqrt{x^3 - 5x^2 + 1} - 2x$$

**Exercice 2 :**

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x - 1} + 3 & ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x < 1 \end{cases}$$

① - a - Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .b - Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .② - Etudier la continuité de la fonction  $f$  aux points  $x_0 = 1$ .③ - Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .④ - Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .a - Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.b - Calculer  $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$ .c - Résoudre dans  $J$  l'équation :  $g^{-1}(x) = 2$ .**Exercice 3 :**

$$\text{On considère la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

① - a - Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .b - Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

② - Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $D_f$ .

③ - Etudier les variations de  $f$  sur  $D_f$ .

④ - On considère l'équation : (E) :  $f(x) = x$ .

a - Montrer que l'équation (E) admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1;2[$ .

b - Montrer que :  $2 - \alpha = \sqrt[3]{\alpha^2 - 1}$ .

c - Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $5 \times 10^{-1}$ .

⑤ - Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

a - Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer

b - Déterminer  $g^{-1}([0;1])$ .

c - Calculer  $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$ .

#### Exercice 4 :

On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = (x-1)^3 + 2$ .

① - Etudier la continuité de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

② - Etudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

③ - Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

④ - Déterminer  $g^{-1}([-6;2])$ .

⑤ - Calculer  $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$ .

#### Exercice 5 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\infty;0]$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}$ .

① - Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $]-\infty;0]$ .

② - Etudier les variations de la fonction  $f$  sur  $]-\infty;0]$ .

③ - Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

④ - Calculer  $(\forall x \in J) : f^{-1}(x)$ .

⑤ - Montrer que l'équation  $f(x) = \sqrt{2}$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $\left] \frac{-2}{3}; \frac{-1}{2} \right[$

⑥ - Dédire que :  $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$ .