Limites d'une fonction

EL KYAL MOHAMED

Limites et inverses des fonctions $x \mapsto x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ et $x \mapsto \sqrt{x}$:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Si n est un nombre pair alors:	Si n est un nombre impair alors:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

Limites des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ / $-\infty$:

Limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré	Limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré

Limites des fonctions trigonométriques :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Limites des fonctions de type $x \mapsto \sqrt{u\left(x\right)}$:

$\lim\limits_{x \to x_0} u\left(x\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u\left(x\right)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

➢ *Théorème de comparaison :*

$$\left.\begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} U(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|f(x) - \ell\right| \leq V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq U(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} U(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} U(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} U(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

➢ *Limites et opérations :*

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left[g(x) + f(x)\right]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left[g(x) \times f(x)\right]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I	F I

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$