

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{6 - U_n}{4 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 0$$

1) Montrer que : $U_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 0$ donc $U_0 < 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 2$ et montrons que

$U_{n+1} < 2$ c'est-à-dire $U_{n+1} - 2 < 0$

$$U_{n+1} - 2 = \frac{6 - U_n}{4 - U_n} - 2 = \frac{6 - U_n - 8 + 2U_n}{4 - U_n}$$

$$U_{n+1} - 2 = \frac{U_n - 2}{4 - U_n}$$

On a $U_n < 2$ donc $U_n - 2 < 0$ et $4 - U_n > 2$

$$\text{donc } U_{n+1} - 2 = \frac{U_n - 2}{4 - U_n} < 0$$

D'où $U_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a - Montrer que :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 3)(U_n - 2)}{4 - U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{6 - U_n}{4 - U_n} - U_n = \frac{6 - U_n - 4U_n + U_n^2}{4 - U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^2 - 5U_n + 6}{4 - U_n} = \frac{(U_n - 3)(U_n - 2)}{4 - U_n}$$

$$(U_n - 3)(U_n - 2) = U_n^2 - 5U_n + 6$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 3)(U_n - 2)}{4 - U_n} \quad \text{On a}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 3)(U_n - 2)}{4 - U_n}$$

On a $U_n - 2 < 0$ et $U_n - 3 < -1$ et $4 - U_n > 2$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 3)(U_n - 2)}{4 - U_n} > 0$$

D'où la suite (U_n) est strictement croissante.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{2U_n - 6}{U_n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2

Montrons que $V_{n+1} = 2V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = \frac{2U_{n+1} - 6}{U_{n+1} - 2} = \frac{2 \frac{6 - U_n}{4 - U_n} - 6}{\frac{6 - U_n}{4 - U_n} - 2} = \frac{12 - 2U_n - 24 + 6U_n}{4 - U_n} = \frac{4 - U_n}{4 - U_n} = 2 \frac{2U_n - 6}{U_n - 2} = 2V_n$$

$$V_{n+1} = \frac{4U_n - 12}{U_n - 2} = \frac{2(U_n - 6)}{U_n - 2} = 2V_n$$

D'où $V_{n+1} = 2V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

b - Exprimer V_n en fonction de n .

(V_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier

$$\text{terme } V_0 = \frac{2U_0 - 6}{U_0 - 2} = 3$$

$$V_n = V_0 2^n \quad \text{donc } V_n = 3 \times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c - En déduire que } U_n = \frac{6 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$V_n = \frac{2U_n - 6}{U_n - 2} \Leftrightarrow V_n(U_n - 2) = 2U_n - 6$$

$$\Leftrightarrow V_n U_n - 2U_n = 2V_n - 6$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n - 2) = 2V_n - 6$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n - 2) = 2V_n - 6$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{2V_n - 6}{V_n - 2}$$

$$\text{Donc } U_n = \frac{2(3 \times 2^n) - 6}{3 \times 2^n - 2} = \frac{6 \times 2^n - 6}{3 \times 2^n - 2}$$

$$U_n = \frac{6 \times 2^n \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{2^n \left(3 - \frac{2}{2^n} \right)} = \frac{6 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{\left(3 - \frac{2}{2^n} \right)}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{6 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d - Calculer $\lim U_n$

$$\lim U_n = \lim \frac{6 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{3 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{Car } \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \quad \text{et} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$$

D'où $\lim U_n = 2$

Exercice 2 :

1) Calculer $I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ et $J = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx$

$$I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^e \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x} dx \quad (1+\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$I = \int_1^e \frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x} dx = [\ln|1+\ln x|]_1^e = \ln(1+\ln e) - \ln(1+\ln 1) = \ln 2$$

D'où $I = \ln 2$

$$J = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx \quad (x^2-1)' = 2x$$

$$J = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} 2x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2-1)' e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2-1}]_0^1$$

$$J = \frac{1}{2} [e^{x^2-1}]_0^1 = \frac{1}{2} (e^0 - e^{-1}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{e})$$

D'où $J = \frac{e-1}{2e}$

2) a - Vérifier que $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \quad \forall x \in [1, 2]$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

b - Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = [\ln|x| - \ln|x+1|]_1^2 = \ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2)$$

D'où $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = 2 \ln 2 - \ln 3$

c - En utilisant une intégration par parties calculer :

$$K = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$

$$u(x) = \ln(x+1) \quad u'(x) = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad v(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$K = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$K = -\frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 2}{1} + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} + 2 \ln 2 - \ln 3 = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

D'où $K = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$

Exercice 3 :

I - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$
 $z^2 - 6z + 12 = 0$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 12 = -12 < 0$$

$$= (i2\sqrt{3})^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6+i2\sqrt{3}}{2} = 3+i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 3-i\sqrt{3}$$

D'où $S = \{3-i\sqrt{3}; 3+i\sqrt{3}\}$

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B et Ω

d'affixes respectives $a = 3+i\sqrt{3}$ et

$$b = 3-\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \omega = 4$$

1) Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe a.

$$a = 3+i\sqrt{3}$$

$$|a| = |3+i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$a = 3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right)$$

$$a = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$a = \left[2\sqrt{3}; \frac{\pi}{6} \right]$$

2) Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par l'homothétie h de centre Ω et de rapport $(1+\sqrt{3})$.

a - Montrer que : $z' = (1+\sqrt{3})z - 4\sqrt{3}$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow z' - 4 = (1+\sqrt{3})(z - 4)$$

$$\Leftrightarrow z' - 4 = (1+\sqrt{3})z - 4(1+\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow z' = (1+\sqrt{3})z - 4\sqrt{3} - 4 + 4 = (1+\sqrt{3})z - 4\sqrt{3}$$

D'où $z' = (1+\sqrt{3})z - 4\sqrt{3}$

b - En déduire que B est l'image du point A par l'homothétie h.

$$h(A) = B \Leftrightarrow b = (1+\sqrt{3})a - 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow b = (1+\sqrt{3})(3+i\sqrt{3}) - 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow b = 3+i\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3i-4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow b = 3-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)$$

3) Montrer que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

$$c = -\sqrt{3} + 3i$$

$$\mathbf{R(A)} = \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{c} - \mathbf{z}_O = e^{i\frac{\pi}{2}} (\mathbf{a} - \mathbf{z}_O)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c} = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})(3 + i\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c} = i(3 + i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 3i$$

D'où $\mathbf{c} = -\sqrt{3} + 3i$

4) Vérifier que : $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ en déduire que OABC est un carré.

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = 3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i = 3 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 3) = \mathbf{b}$$

D'où $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$

$$\text{On a } \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{z}_O$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{a} - \mathbf{z}_O} \Leftrightarrow \text{aff}(\overrightarrow{\mathbf{CB}}) = \text{aff}(\overrightarrow{\mathbf{OA}})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{CB}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}}$$

Donc OABC est un parallélogramme

$$\text{Or } \mathbf{R(A)} = \mathbf{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{OA}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} \text{ et } (\overrightarrow{\mathbf{OA}}; \overrightarrow{\mathbf{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

D'où OABC est carré.

5) Montrer que $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{6}$ et $\arg(\mathbf{b}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

$$|\mathbf{b}| = |3 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 3)| = \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} + 3)^2}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{9 - 6\sqrt{3} + 3 + 9 + 6\sqrt{3} + 3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

D'où $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{6}$

$$\text{On a } \mathbf{a} = \left[2\sqrt{3}; \frac{\pi}{6} \right] \text{ donc } \arg(\mathbf{a}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{Or } \arg(\mathbf{a}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ donc } (\overrightarrow{\mathbf{u}}; \overrightarrow{\mathbf{OA}}) \equiv \arg(\mathbf{a}) [2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{\mathbf{u}}; \overrightarrow{\mathbf{OA}}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

On a $[\mathbf{OB}]$ est une diagonale du carré OABC

$$\text{Donc } (\overrightarrow{\mathbf{OA}}; \overrightarrow{\mathbf{OB}}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ Or } \arg(\mathbf{b}) \equiv (\overrightarrow{\mathbf{u}}; \overrightarrow{\mathbf{OB}}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}}; \overrightarrow{\mathbf{OB}}) \equiv (\overrightarrow{\mathbf{u}}; \overrightarrow{\mathbf{OA}}) + (\overrightarrow{\mathbf{OA}}; \overrightarrow{\mathbf{OB}}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}}; \overrightarrow{\mathbf{OB}}) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ d'où } (\overrightarrow{\mathbf{u}}; \overrightarrow{\mathbf{OB}}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

6) En déduire que \mathbf{b}^6 est un nombre imaginaire pur.

$$\text{On a } |\mathbf{b}| = 2\sqrt{6} \text{ et } \arg(\mathbf{b}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

$$\text{Donc } \mathbf{b} = \left[2\sqrt{6}; \frac{5\pi}{12} \right] \text{ donc } \mathbf{b}^6 = \left[2\sqrt{6}; \frac{5\pi}{12} \right]^6$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}^6 = \left[(2\sqrt{6})^6; 6 \frac{5\pi}{12} \right] = \left[(2\sqrt{6})^6; \frac{5\pi}{2} \right]$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}^6 = \left[(2\sqrt{6})^6; 2\pi + \frac{\pi}{2} \right] = \left[(2\sqrt{6})^6; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Donc } \mathbf{b}^6 = (2\sqrt{6})^6 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = i(2\sqrt{6})^6$$

D'où \mathbf{b}^6 est un nombre imaginaire pur.

Problème :

Partie I :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\mathbf{g(x)} = \mathbf{x - 1 + e^{2x}}$$

1) a) Calculer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{g(x)} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{x - 1 + e^{2x}} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{e^{2x}} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{x - 1 + e^{2x}} = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{e^{2x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{x} = -\infty$$

b) Calculer $\mathbf{g'(x)}$ et dresser le tableau des variations

$$\mathbf{g(x)} = \mathbf{x - 1 + e^{2x}}$$

$$\mathbf{g'(x)} = \mathbf{1 + 2e^{2x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{g'(x)} = \mathbf{1 + 2e^{2x}} > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\mathbf{g'(x)}$	+	
$\mathbf{g(x)}$	$-\infty$	$+\infty$

2) Montrer que $\mathbf{g(x)} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in]-\infty; 0]$ et

$$\mathbf{g(x)} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in [0; +\infty[\text{ (remarquer que } \mathbf{g(0)} = \mathbf{0})}$$

On sait que g est croissante sur \mathbb{R}

$$\forall \mathbf{x} \in]-\infty; 0] \text{ donc } \mathbf{x} \leq 0 \text{ donc } \mathbf{g(x)} \leq \mathbf{g(0)}$$

$$\text{D'où } \mathbf{g(x)} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in]-\infty; 0]$$

$$\forall \mathbf{x} \in [0; +\infty[\text{ donc } \mathbf{x} \geq 0 \text{ donc } \mathbf{g(x)} \geq \mathbf{g(0)}$$

$$\text{D'où } \mathbf{g(x)} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in [0; +\infty[$$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\mathbf{f(x)} = \mathbf{x^2 - 2x + e^{2x}}$$

1) a - Calculer: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{f(x)}$ et montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{f(x)} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{x^2 - 2x + e^{2x}} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{x^2 - 2x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{e^{2x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{x^2 - 2x + e^{2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{x(x-2) + e^{2x}} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{x(x-2)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{e^{2x}} = +\infty$$

b - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

et interpréter les résultats géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + 2 \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + e^{2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 + \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 + \frac{1}{x} e^{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

D'où (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a - Montrer que $f'(x) = 2g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 2x + e^{2x}$$

$$f'(x) = 2x - 2 + 2e^{2x} = 2(x - 1 + e^{2x}) = 2g(x)$$

D'où $f'(x) = 2g(x)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} puis Dresser le tableau des variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

On a $f'(x) = 2g(x)$

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[\text{ donc } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

$$g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0] \text{ donc } f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0]$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	1	$+\infty$

c) Montrer que $y = 1$ est l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0

On a $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

Donc $y = 1$

d - En déduire que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

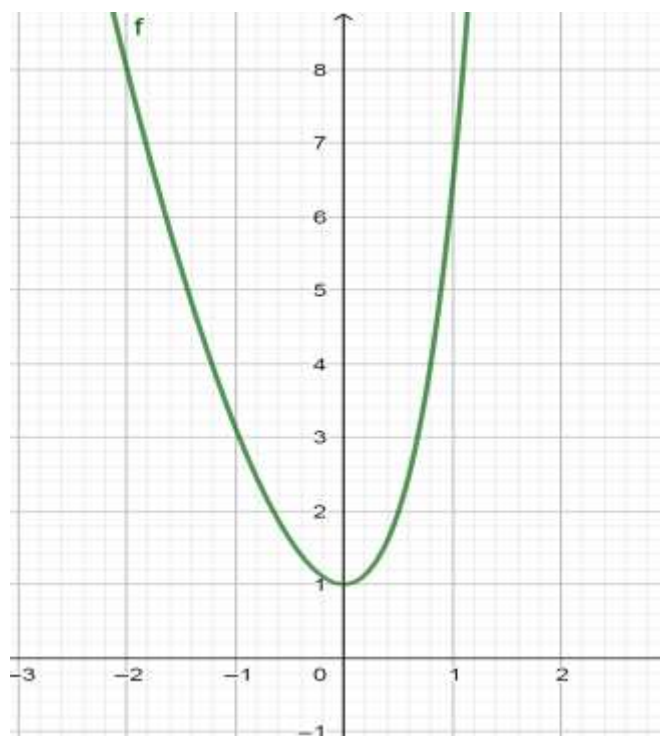
$f(0) = 1$ est le minimum de f sur \mathbb{R}

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(0)$

Donc $f(x) \geq 1 \geq 0$

D'où $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Tracer la courbe (C_f) .



Partie III:

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = U_n^2 + e^{2U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } U_0 = 1$$

1) Montrer que : $U_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1$ donc $U_0 \geq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n \geq 1$ et montrons que $U_{n+1} \geq 1$

$$U_n \geq 1 \Rightarrow U_n^2 \geq 1 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1 \quad e^{2U_n} > 0$$

D'où $U_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a - Montrer que $U_{n+1} \geq 2U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } x^2 - 2x + e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + e^{2x} \geq 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } U_n^2 + e^{2U_n} \geq 2U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où $U_{n+1} \geq 2U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b - Montrer que la suite (U_n) est croissante.

On a $U_{n+1} \geq 2U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n \geq 2U_n - U_n$$

Donc $U_{n+1} - U_n \geq U_n$ or $U_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est croissante

3) a – Montrer que : $U_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1$ et $2^0 = 1$ donc $U_0 \geq 2^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n \geq 2^n$ et montrons que

$$U_{n+1} \geq 2^{n+1}$$

On a $U_n \geq 2^n$ donc $2U_n \geq 2 \times 2^n \Leftrightarrow 2U_n \geq 2^{n+1}$

Or $U_{n+1} \geq 2U_n$ donc $U_{n+1} \geq 2U_n \geq 2^{n+1}$

Donc $U_{n+1} \geq 2^{n+1}$

D'où $U_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b – Calculer $\lim U_n$

on a $U_n \geq 2^n$ et $\lim 2^n = +\infty \quad 2 > 1$

d'où $\lim U_n = +\infty$