

Exercice 1 :1) a - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ l'équation admet deux solutions distincts.

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$S = \{2; 3\}$$

b - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$\text{On a } e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$$

$$\text{On pose } t = e^x \text{ donc } t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$\text{Donc } t = 2 \text{ ou } t = 3 \Leftrightarrow e^x = 2 \text{ ou } e^x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ ou } x = \ln 3$$

$$S = \{\ln 2; \ln 3\}$$

c - Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln^2 x - 5 \ln x + 6 = 0 \quad x > 0$$

$$\text{On a } \ln^2 x - 5 \ln x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$$

$$\text{On pose } t = \ln x \text{ donc } t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$\text{Donc } t = 2 \text{ ou } t = 3 \Leftrightarrow \ln x = 2 \text{ ou } \ln x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = e^2 \text{ ou } x = e^3$$

$$S = \{e^2; e^3\}$$

$$2) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R}^2 \text{ le système: } \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln 10 \\ x-y = \ln \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln 2 + \ln 5 \\ x-y = \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \ln 2 + \ln 5 \\ x-y = \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$$

$$\text{Donc } 2x = 2 \ln 2 \text{ et } 2y = 2 \ln 5$$

$$\text{Donc } x = \ln 2 \text{ et } y = \ln 5$$

$$\text{D'où } S = \{(\ln 2; \ln 5)\}$$

Exercice 2 :I - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 26 = 0$

$$z^2 - 2z + 26 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 26 = -100 < 0$$

$$= (10i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + i10}{2} = 1 + 5i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 1 - 5i$$

$$\text{D'où } S = \{1 - 5i; 1 + 5i\}$$

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 5i$ et $b = 1 - 5i$ et $c = \frac{7}{2}$

1) Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la transformation h définie par l'expression complexe : $z' = \frac{-3}{5}z + \frac{56}{10}$

a - Montrer que h est une homothétie de centre C et de rapport $\frac{-3}{5}$

$$\text{On a } c = \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad k = \frac{-3}{5}$$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{-3}{5}z + \frac{56}{10}$$

$$\Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}z + \frac{56}{10} - \frac{7}{2} \Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}z + \frac{21}{10}$$

$$\Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}z - \left(\frac{-3}{5}\right) \times \frac{7}{2} \Leftrightarrow z' - \frac{7}{2} = \frac{-3}{5}\left(z - \frac{7}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z' - c = \frac{-3}{5}\left(z - c\right)$$

$$\text{D'où } h \text{ est une homothétie de centre } C \text{ et de rapport } \frac{-3}{5}$$

b - Montrer que l'affixe du point D image du point B par l'homothétie h est : $d = 5 + 3i$

$$h(B) = D \Leftrightarrow d = \frac{-3}{5}b + \frac{56}{10}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{-3}{5}(1 - 5i) + \frac{56}{10} = \frac{-3}{5} + 3i + \frac{56}{10}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{50}{10} + 3i + \frac{56}{10} = 5 + 3i$$

$$\text{D'où } d = 5 + 3i$$

2) a - Montrer que $\frac{d-a}{c-b} = \frac{-4}{5}i$

$$\frac{d-a}{c-b} = \frac{5+3i-1-5i}{\frac{7}{2}-1+5i} = \frac{4-2i}{\frac{5}{2}+5i} = \frac{8-4i}{5+10i}$$

$$\frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{b}} = \frac{8-4\mathbf{i}}{5+10\mathbf{i}} = \frac{-4}{5} \frac{(-2+\mathbf{i})}{1+2\mathbf{i}}$$

$$\frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{b}} = \frac{-4}{5} \frac{(2\mathbf{i}^2+\mathbf{i})}{1+2\mathbf{i}} = \frac{-4\mathbf{i}}{5} \frac{(2\mathbf{i}+1)}{1+2\mathbf{i}}$$

$$\text{D'où } \frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{b}} = \frac{-4\mathbf{i}}{5}$$

b - Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathbf{BC}}; \overrightarrow{\mathbf{AD}})$ en déduire que $[\mathbf{AD}]$ est une hauteur du triangle ABC

$$\text{On a } \frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{b}} = \frac{-4}{5} \mathbf{i} = \frac{4}{5} (\cos \frac{\pi}{2} - \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{b}} = \frac{-4}{5} \mathbf{i} = \frac{4}{5} (\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathbf{i} \sin(-\frac{\pi}{2}))$$

$$\text{Donc } \frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{b}} = \left[\frac{4}{5}; -\frac{\pi}{2} \right] \text{ on a } (\overrightarrow{\mathbf{BC}}; \overrightarrow{\mathbf{AD}}) \equiv \arg\left(\frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{b}}\right) [2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{\mathbf{BC}}; \overrightarrow{\mathbf{AD}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{On a } (\overrightarrow{\mathbf{BC}}; \overrightarrow{\mathbf{AD}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow (\mathbf{BC}) \perp (\mathbf{AD})$$

Or $h(\mathbf{B}) = \mathbf{D}$ donc B, C et D sont alignés.

D'où $[\mathbf{AD}]$ est une hauteur du triangle ABC.

3) Montrer que l'ensemble $M(z)$ des points du plan complexe qui vérifient $|\bar{z}-1+5\mathbf{i}|=10$ est le cercle (C) de centre A qui passe par le point B.

$$\text{On a } \mathbf{a} = 1+5\mathbf{i} \text{ et } \mathbf{b} = 1-5\mathbf{i} \text{ et } |\bar{z}| = |z|$$

$$\text{On sait que } |\bar{z}-1+5\mathbf{i}| = |\overline{z-1-5\mathbf{i}}| = |z-1-5\mathbf{i}|$$

$$\text{Donc } |\bar{z}-1+5\mathbf{i}| = |z-(1+5\mathbf{i})| = |z-\mathbf{a}|$$

$$\text{Donc } |z-\mathbf{a}| = 10 \Leftrightarrow \mathbf{AM} = 10 \text{ donc l'ensemble } M(z) \text{ est le cercle de centre A et de rayon 10 or } \mathbf{AB} = |\mathbf{b}-\mathbf{a}| = |-10\mathbf{i}| = 10$$

D'où l'ensemble $M(z)$ des points du plan complexe qui vérifient $|\bar{z}-1+5\mathbf{i}|=10$ est le cercle (C) de centre A qui passe par le point B.

Exercice 3 :

$$\text{On pose } \mathbf{I} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx \text{ et } \mathbf{J} = \int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x+1) dx$$

$$1) \text{ a - Vérifier que : } e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

$$e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1} = \frac{(e^x-1)(e^x+1)+1}{e^x+1} = \frac{e^{2x}-1+1}{e^x+1} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

$$\text{D'où } e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

$$\text{b - Donner la fonction dérivée de : } \mathbf{f}(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)$$

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)'}{\frac{e^{2x}}{e^x+1}}$$

$$\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)' = \frac{2e^{2x}(e^x+1) - e^{2x}e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{\frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x+1)^2}}{\frac{e^{2x}}{e^x+1}} = \frac{e^{2x}(e^x+2)}{e^{2x}(e^x+1)}$$

$$\text{D'où } \mathbf{f}'(x) = \frac{e^x+2}{e^x+1} \quad \frac{e^x+2}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} + 1$$

2) a - Calculer l'intégrale I.

$$\mathbf{I} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx = \int_0^{\ln 2} e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1} dx$$

$$\mathbf{I} = \int_0^{\ln 2} e^x - 1 + \frac{1}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} dx$$

$$\mathbf{I} = \int_0^{\ln 2} e^x - 1 + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$\mathbf{I} = \int_0^{\ln 2} e^x - 1 - \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} dx; (1+e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$\mathbf{I} = \left[e^x - x - \ln(1+e^{-x}) \right]_0^{\ln 2}$$

$$\mathbf{I} = e^{\ln 2} - \ln 2 - \ln(1+e^{-\ln 2}) - 1 + \ln 2$$

$$\text{Donc } \mathbf{I} = 1 - \ln(1+e^{-\ln 2}) = 1 - \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{D'où } \mathbf{I} = 1 - \ln \frac{3}{2}$$

b - A l'aide d'une intégration par parties calculer J.

$$\mathbf{J} = \int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x+1) dx$$

$$\mathbf{u}(x) = \ln(e^x+1) \quad \mathbf{u}'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\mathbf{v}'(x) = e^x \quad \mathbf{v}(x) = e^x$$

$$\mathbf{J} = \left[e^x \ln(e^x+1) \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$\mathbf{J} = e^{\ln 2} \ln(e^{\ln 2}+1) - \ln 2 - \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$$

$$\mathbf{J} = 2 \ln(3) - \ln 2 - \mathbf{I} = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + \ln \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{J} = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + \ln 3 - \ln 2 = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

$$\text{D'où } \mathbf{J} = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

Problème :

Partie I :

1) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x + 1 + x \ln x$$

a- Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de la fonction g .

$$g(x) = -x + 1 + x \ln x$$

$$g'(x) = -1 + \ln x + x \frac{1}{x} = -1 + \ln x + 1 = \ln x$$

$$\text{D'où } g'(x) = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

On a $\forall x \in]0; 1]$ $g'(x) \leq 0$ et $g'(x) \geq 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$			

b - En déduire que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$
et que 1 est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$

Donc $g(1) = 0$ est le minimum de g sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad g(x) \geq g(1) \quad \text{D'où } g(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

On a $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\quad g(x) > 0$ or $g(1) = 0$

Donc 1 est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$

2) On pose $h(x) = 1 + 2x \ln x \quad \forall x \in]0; +\infty[$

a- Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau des variations de la fonction h .

$$h(x) = 1 + 2x \ln x$$

$$h'(x) = 2 \ln x + 2x \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\text{D'où } h'(x) = 2(\ln x + 1) \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$\forall x \in]0; \frac{1}{e}] \quad h'(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad h'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$			

b - En déduire que $h(x) > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

$$h\left(\frac{1}{e}\right) = 1 + \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \ln e = \frac{e-1}{e}$$

$h\left(\frac{1}{e}\right)$ est le minimum de h sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad h(x) \geq h\left(\frac{1}{e}\right) \quad \text{or} \quad h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{e} > 0$$

$$\text{D'où } h(x) > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1) + 2\sqrt{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a - Montrer que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)?$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x - 1) + 2\sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - x + 2\sqrt{x} = 0 = f(0) \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

D'où f est continue à droite en 0

b - Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (on peut poser $t = \sqrt{x}$)

et interpréter le résultat géométriquement.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\ln x - 1) + 2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - 1 + \frac{2\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

On pose $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$ donc $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t^2 - 1 + \frac{2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} 2 \ln t - 1 + \frac{2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t \ln t - t + 2}{t} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (C_f) admet une demi tangente

verticale à droite en 0.

1) a - Calculer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1) + 2\sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1) = +\infty$$

b - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter

les résultats géométriquement.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

3) a - Montrer que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} h(\sqrt{x}) \quad \forall x > 0$

$$f(x) = x(\ln x - 1) + 2\sqrt{x} \quad \forall x > 0$$

$$f'(x) = (\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' + 2 \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} h(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} (1 + 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \frac{1}{2} \ln x = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x \quad \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

D'où $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} h(\sqrt{x})$

b - En déduire que f est croissante sur $]0; +\infty[$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} h(\sqrt{x})$$

On a $h(x) > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$ donc $\sqrt{x} > 0$

Donc $h(\sqrt{x}) > 0$ donc $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

Donc f est croissante sur $]0; +\infty[$ or $f(0) = 0$

D'où f est croissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

c) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à (C_f) au point d'abscisse 1.

On a $y = f'(1)(x-1) + f(1)$; $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$

Donc $y = x$

4) a - Montrer que $f(x) - x = 2\sqrt{x}g(\sqrt{x}) \quad \forall x > 0$

$$f(x) = x(\ln x - 1) + 2\sqrt{x}$$

$$f(x) - x = x \ln x - x + 2\sqrt{x} - x$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x = x \ln x - 2x + 2\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x}g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}(-\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} \ln \sqrt{x})$$

$$= -2x + 2\sqrt{x} + 2x \ln \sqrt{x} = -2x + 2\sqrt{x} + 2x \frac{1}{2} \ln x$$

$$= -2x + 2\sqrt{x} + x \ln x$$

D'où $f(x) - x = 2\sqrt{x}g(\sqrt{x}) \quad \forall x > 0$

b- En déduire que (C_f) est au-dessus de (Δ) sur $]0; +\infty[$

On a $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

Donc $\sqrt{x} > 0$ donc $g(\sqrt{x}) \geq 0$

donc $f(x) - x = 2\sqrt{x}g(\sqrt{x}) \geq 0$

Donc $f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x \quad \forall x \in]0; +\infty[$ $f(0)=0$

D'où (C_f) est au-dessus de (Δ) sur $]0; +\infty[$

5) a - Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(]0; +\infty[)$

Donc $f(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$ donc $J =]0; +\infty[$

b - Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$

On a f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$ donc $f'(1) \neq 0$

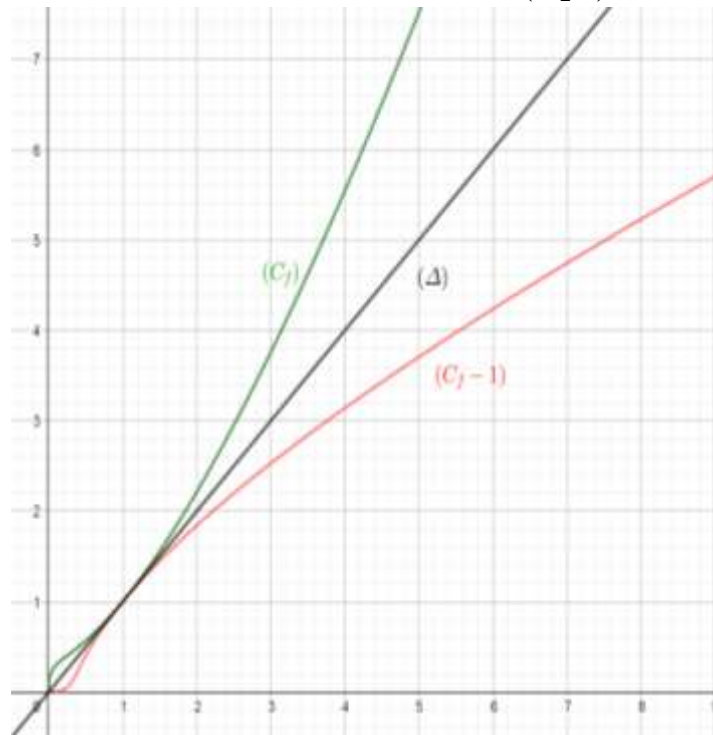
D'où que la fonction f^{-1} est dérivable en $f(1) = 1$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 1$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(1)} = 1$$

d'où $(f^{-1})'(1) = 1$

6) Tracer la droite (Δ), la courbe (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.



Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = \frac{1}{2}$$

1) Montrer que : $0 < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < U_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$

On a f est strictement croissante sur I et $0 < U_n < 1$
 $0 < U_n < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(U_n) < f(1) \Leftrightarrow f(0) < f(U_n) < f(1)$
 $\Leftrightarrow 0 < U_{n+1} < 1$

D'où $0 < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) \geq x \quad \text{or} \quad 0 < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc } f(U_n) \geq U_n \quad \text{donc} \quad U_{n+1} \geq U_n$$

D'où la suite (U_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer $\lim U_n$

On a la suite (U_n) est croissante et majorée

D'où la suite (U_n) est convergente

f est continue sur $[0; +\infty[$ en particulier sur $[0; 1]$

On a $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; 1]$ car f est croissante sur $[0; 1]$ $U_0 \in [0; 1]$

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$ or on sait que

Méthode algébrique

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}g(\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \quad \text{ou} \quad g(\sqrt{x}) = 0$$

On a 1 est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Or la suite (U_n) est croissante donc $U_n \geq U_0$ et

$$U_0 = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \lim U_n \geq \frac{1}{2}$$

D'où $\lim U_n = 1$

Méthode graphique

La droite (Δ) coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses 0 et 1 donc 0 et 1 sont les solutions de l'équation $f(x) = x$

Or la suite (U_n) est croissante donc $U_n \geq U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{et} \quad U_0 = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \lim U_n \geq \frac{1}{2}$$

D'où $\lim U_n = 1$