Les nombres en rouge sont les coefficients dans la triangle de Newton de la ligne n=4 (voir le triangle)

Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire

VIII. Expérience aléatoire :

a. Activité :

- 1ère expérience :Si on tombe un morceau de fer d'une hauteur de 3 mètres le morceau tombe par terre si on répète cette expérience plusieurs fois on obtient le même résultat .
- 2ième expérience : Si on lance un dé de six face numérotés de 1 à 6 on s'intéresse du résultat de la face supérieure . est-ce qu'on peut connaitre d'avance le résultat ? (donc non)
- 3ième expérience : Si on lance une pièce de monnaie deux fois successives on s'intéresse des résultats de la face supérieure après chaque lancement de dé . est-ce qu'on peut connaitre d'avance le résultat ? (donc non)

b. terminologie : Expérience aléatoire – univers - éventualité – évènement :

- Expérience aléatoire : toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire .
  exemple : 2ième expérience et 3ième expérience .
- Les résultats obtenues par cette expérience aléatoire on les note par ω_1 puis ω_2 puis ω_3 ……ω_n (on général ω_i avec $i \in \{1,2,...;n\}$) .
  exemple 2ième expérience : $\omega_1 = 1$ puis $\omega_2 = 2$ puis $\omega_3 = 3$ puis $\omega_4 = 4$ puis $\omega_5 = 5$ puis $\omega_6 = 6$.
  exemple 3ième expérience : $\omega_1 = FF$ puis $\omega_2 = FP$ puis $\omega_3 = PF$ puis $\omega_4 = PP$.
- Eventualité (ou événement élémentaire) : chaque ω_i s'appelle une éventualité ou un événement élémentaire .
  exemple 2ième expérience : lorsque on obtient 1, on dit que $\omega_1 = 1$ est une éventualité ou cas possible .
  exemple 3ième expérience : lorsque on obtient FF , on dit que $\omega_1 = FF$ est une éventualité ou cas possible .
  Univers : les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble s'appelle univers noté $\Omega = \{\omega_1;\omega_2,....,\omega_n\}$.
  exemple : pour 2ième expérience $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
  exemple : pour 3ième expérience $\Omega = \{PP;PF,FF,FP\}$
- Evènement : toute partie A de Ω s'appelle événement .
  Exemple : $A = \{PP,FF\} \subset \Omega$ donc $A = \{PP,FF\}$ est un évènement.
  remarque on peut exprimer : un évènement par une phrase .
  exemple $A = \{PP,FF\}$
  on exprime A par la phrase suivante A « les deux lancements de dé donne même résultat »
  - Si $A = \Omega$ alors l'évènement Ω s'appelle événement certain .
    exemple 2ième expérience $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ événement certain .
    exemple 3ième expérience $\Omega = \{PP;PF,FF,FP\}$ événement certain

- Si $A=\varnothing$ alors l'évènement $\varnothing$ s'appelle **événement impossible** .
- Si $A=\{\omega_i\}$ alors l'évènement $\{\omega_i\}$ s'appelle **événement élémentaire** .

exemple 2ième expérience $\{5\}$ événement élémentaire .

exemple 2ième expérience $\{PF\}$ événement élémentaire .

- Si $A\cap B=\varnothing$ on dit que A et B sont **deux événements incompatibles** .
- Si $A\cap B=\varnothing$ et $A\cup B=\Omega$ alors B s'appelle **l'événement contraire de A** (vis versa) on note $B=\overline{A}$ (de même $A=\overline{B}$) . remarque $\text{card}A+\text{card}\overline{A}=\text{card}\Omega$.

exemple 2ième expérience: $A=\{1,2\}$ l'événement contraire de A est $\overline{A}=\{3,4,5,6\}$.

exemple 3ième expérience: $A=\{FF,PF\}$ l'événement contraire de A est $\overline{A}=\{FF;FP\}$.

- **L'événement $A\cap B$** est l'ensemble constitué par des éventualités réaliser à la fois par les événements A et B .
- **L'événement $A\cup B$** est l'ensemble constitués par des éventualités réaliser soit par l'événement A ou par l'événement B .
- Les événements A_1 et A_2 et A_3, ….. , A_p est **une partition de Ω** s'ils sont disjoints deux à deux et $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_p=\Omega$.

exemple 2ième expérience: $A=\{1,2\}$ et $B=\{5\}$ et $C=\{3,4,6\}$ est une partition de $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

exemple 3ième expérience: $A=\{PP,FF,PF\}$ et $B=\{FP\}$ est une partition de $\Omega=\{PP;PF,FF,FP\}$.

IX. Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire :

A. Probabilité d'un cas possible être réaliser (ou d'un événement élémentaire être réaliser) :

a. Activité :

On lance dans l'air une pièce de monnaie 2 fois successives (si le 1er lancer donne P et la 2ième lancer donne F cet éventualité (ou cas possible) sera noté **PF** .

Cet expérience est répétée 1000 fois on obtenue les résultats suivants :

Cas possibles (événement élémentaire)	FF	FP	PF	PP
Nombres des cas possibles être réaliser	240	260	270	230

1. Quel est l'événement élémentaire qui a une grande chance d'être réaliser ?

C'est l'événement élémentaire **PF** , on dit que probabilité pour obtenir **PF** est $\frac{270}{1000}$ on écrit

$p(\{PF\})=\frac{270}{1000}=0,27$.

2. Quel est l'événement élémentaire qui a une faible chance d'être réaliser ?

C'est l'événement élémentaire **PP** , on dit que probabilité pour obtenir **PF** est $\frac{230}{1000}$ on écrit

$p(\{PF\})=\frac{230}{1000}=0,23$.

B. Probabilité sur univers fini (un ensemble fini) :

a. Définition :

Soit $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ univers des éventualités d'une expérience aléatoire .

- Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si n_i est le nombre de fois on a obtenue ω_i . Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l' événement élémentaire $\{\omega_i\}$ on note $p_i=p(\{\omega_i\})=\frac{n_i}{N}$ sans oublier $p_1+p_2+p_3+\cdots p_n=1$.
- Probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A on note $p(A)$ (exemple : $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_7\}$ donc $p(A)=p(\{\omega_1\})+p(\{\omega_3\})+p(\{\omega_7\})$

b. Exemple :

$\Omega=\{PP;PF,FF,FP\}$ donc $p(\{PP;PF,FF,FP\})=1$

c. Propriété :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire

- $\forall A\in\Omega:0\leq p(A)\leq 1$ et $p(\Omega)=1$ et $p(\varnothing)=0$.

  et
- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ et $p(\overline{A})=1-p(A)$.

C. Hypothèse d'équiprobabilité :

a. Propriété :

Si dans une expérience aléatoire (dont l'univers est Ω) tous les événements élémentaires $A=\{\omega_i\}$ ont même probabilité (c.à.d. $p(\{\omega_1\})=p(\{\omega_2\})=p(\{\omega_3\})=..........=p(\{\omega_n\})$

alors probabilité d'un évènement A de Ω est $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}$.

b. Remarque :

équiprobabilité est exprimé par les expressions suivants :

- des boules indiscernables aux touchés .

- On lance un dé (ou une pièce de monnaie) au hasard .

c. Exemple :

On lance au hasard dans l'air une pièce de monnaie 2 fois successives (si le 1er lancer donne P et la 2ième lancer donne F cet éventualité (ou cas possible) sera noté **PF** .

On considère l'événement suivant :

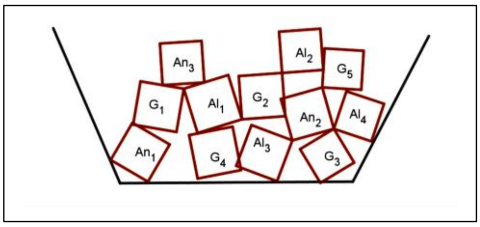
A « on obtient le même résultat après le lancement de la pièce de monnaie deux fois »

On a : $A=\{PP,FF\}$ donc $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{2}{4}$ car $\Omega=\{PP;PF,FF,FP\}$.

d. Application :

- **Application 1 :**

Examen oral en mathématique comporte 5 question en géométrie et 4 question en algèbre et 3 question en analyse .l'étudiant tire simultanément 3 questions d'un sac contenant ces 12 questions .



1. Calculer probabilité des événements suivants :

A « les 3 questions sont en géométrie » .
B « une seule question pour chaque matière » .
C « au moins une question en géométrie » .

Correction :

1. Calculons probabilité des événements :
   - Calculons le nombre des cas possibles (c.à.d. $card\Omega$)

Le tirage simultanément de 3 questions parmi 12 questions représente une combinaison de 3 parmi 12 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 12 donc :

$card\Omega=C_{12}^{3}=\dfrac{12\times11\times10}{1\times2\times3}=220$.

- On calcule $p(A)$:

On calcule $cardA$

Le tirage simultanément de 3 questions parmi 5 questions représente une combinaison de 3 parmi 5 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 5 donc :

$cardA=C_{5}^{3}=\dfrac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10$.

Conclusion : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{22}$

- On calcule $p(B)$:

On calcule $cardB$

Le tirage d'une question en géométrie parmi 5 donc $C_5^1=5$ et

Le tirage d'une question en algèbre parmi 4 donc $C_4^1=4$ et

Le tirage d'une question en analyse parmi 3 donc $C_3^1=3$

donc : $cardB=C_5^1\times C_4^1\times C_3^1=5\times4\times3=60$.

Conclusion : $p(B)=\dfrac{cardB}{card\Omega}=\dfrac{C_5^1\times C_4^1\times C_3^1}{C_{12}^3}=\dfrac{60}{220}=\dfrac{3}{11}$

- On calcule $p(C)$.

C « au moins une question en géométrie » . l'événement contraire de C est $\overline{C}$.

$\overline{C}$ « aucune question en géométrie » on bien :

$\overline{C}$ « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

donc : $\text{card}\overline{C} = C_7^3 = \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3} = 35$.

D'où : $p\left(\overline{C}\right) = \frac{\text{card}\overline{C}}{\text{card}\Omega} = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7\times5}{12\times11\times10} = \frac{7}{264}$.

Conclusion : $p(C) = 1 - p\left(\overline{C}\right) = 1 - \frac{7}{264} = \frac{257}{264}$

- **Application 2 :**

1. Maintenant le tirage est de trois questions sont tirés l'une après l'autre sans remise . Calculer probabilité de l'événement suivant :

A « les 3 questions sont en géométrie » .

- Calculons le nombre des cas possibles (c.à.d. $\text{card}\Omega$)

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et sans remise parmi 12 questions représente une arrangement sans répétition de 3 parmi 12 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangement sans répétition de 3 parmi 12 donc : $\text{card}\Omega = A_{12}^3 = 12\times11\times10 = 1320$.

- On calcule $p(A)$:

On calcule $\text{card}A$

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et sans remise parmi 5 questions représente une arrangement sans répétition de 3 parmi 5 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangement sans répétition de 3 parmi 5 donc : $\text{card}A = A_5^3 = 5\times4\times3 = 60$.

Conclusion : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{60}{1320} = \frac{\cancel{60}}{\cancel{60}\times22} = \frac{1}{22}$.

2$^{\text{ième}}$ méthode :

La première question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{5}{12}$.

La deuxième question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{4}{11}$

La troisième question est en géométrie sa probabilité est : $\frac{3}{10}$

Donc : $p(A) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10} = \frac{1}{22}$

2. On calcule $p(B)$ tel que : B « une seule question pour chaque matière » .

On calcule $\text{card}B$

On tire une question en géométrie donc on a $A_5^1 = 5$ manière différentes .

On tire une question en algèbre donc on a $A_4^1 = 4$ manière différentes

On tire une question en analyse donc on a $A_3^1 = 3$ manière différentes

Si la 1ère question en géométrie et la 2ième en algèbre et la 3ième en analyse on aura $A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1$ manière différentes mais on ne sait pas l'ordre des 3 matières pour obtenir les 3 questions par suite c'est d'ordonnée 3 questions parmi 3 matières d'où le nombre de manières est A_3^3 ou $3!$

Par suite $\text{card}B = 3! \times A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 = 6 \times 60 = 360$

Conclusion : $p(B) = \dfrac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \dfrac{3! \times A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1}{A_{12}^3} = \dfrac{6\times 60}{1320} = \dfrac{\cancel{60}\times 6}{\cancel{60}\times 22} = \dfrac{3}{11}$

Explication :

Numéro de la question	Q 1	Q 2	Q 3
quelle matière	algèbre	géométrie	analyse
quelle matière	géométrie	analyse	algèbre
quelle matière	algèbre	analyse	géométrie
quelle matière	⋮ ↓	⋮ ↓	⋮ ↓
	On a $3! = 6$ cas possibles (manières)		

3. On calcule $p(C)$ tel que : C « au moins une question en géométrie » .

On calcule $\text{card}C$

C « au moins une question en géométrie » . l'événement contraire de C est $\overline{C}$.

$\overline{C}$ « aucune question en géométrie » on bien :

$\overline{C}$ « les 3 questions en algèbe ou en analyse »

donc : $\text{card}C = A_7^3 = 7\times 6\times 5 = 210$.

D'où : $p(\overline{C}) = \dfrac{\text{card}\overline{C}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{A_7^3}{A_{12}^3} = \dfrac{210}{1320} = \dfrac{7}{44}$.

Conclusion : $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \dfrac{7}{44} = \dfrac{37}{44}$

- Application 3 :

1. Maintenant le tirage est de trois questions sont tirés l'une après l'autre avec remise .
Calculer probabilité de l'événement suivant :

A « les 3 questions sont en géométrie » .

- Calculons le nombre des cas possibles (c.à.d. $\text{card}\Omega$)

1ère méthode :

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et avec remise parmi 12 questions représente une arrangement avec répétition de 3 parmi 12 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangement avec répétition de 3 parmi 12 donc : $\text{card}\Omega = 12^3 = 1\ 902\ 528$.

2ième méthode :

La 1ère question tiré a 12 cas possibles (ou manières) .
La 2ième question tiré a 12 cas possibles (ou manières) . (avec remise)
La 3ième question tiré a 12 cas possibles (ou manières) . (avec remise)
D'après le principe général de dénombrement (ou principe du produit) donc :
$\text{card}\Omega = 12\times 12\times 12 = 12^3 = 1\ 902\ 528$ (c'est mieux de d'écrire $\text{card}\Omega = 12\times 12\times 12 = 12^3$)

- On calcule $p(A)$:

  On calcule $\text{card}A$

Le tirage de 3 questions l'une après l'autre et avec remise parmi 5 questions représente une arrangement avec répétition de 3 parmi 5 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des arrangement avec répétition de 3 parmi 5 donc : $\text{card}A = 5^3 = 125$.

Conclusion : $p(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \dfrac{5^3}{12^3} = \left(\dfrac{5}{12}\right)^3$.

2ième méthode :

La première question est en géométrie sa probabilité est : $\dfrac{5}{12}$.

La deuxième question est en géométrie sa probabilité est : $\dfrac{5}{12}$ (avec remise)

La troisième question est en géométrie sa probabilité est : $\dfrac{5}{12}$ (avec remise)

Donc : $p(A) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{5}{12} = \left(\dfrac{5}{12}\right)^3$

2. On calcule $p(B)$ tel que : B « une seule question pour chaque matière » .

On calcule $\text{card}B$

On tire une question en géométrie donc on a 5^1 manière différentes .

On tire une question en algèbre donc on a 4^1 manière différentes

On tire une question en analyse donc on a 3^1 manière différentes

Si la 1ère question en géométrie et la 2ième en algèbre et la 3ième en analyse on aura $5^1 \times 4^1 \times 3^1$ manière différentes mais on ne sait pas l'ordre des 3 matières pour obtenir les 3 questions par suite c'est d'ordonnée 3 questions parmi 3 matières d'où le nombre de manières est A_3^3 ou $3!$

Explication :

Numéro de la question	Q 1	Q 2	Q 3
quelle matière	algèbre	géométrie	analyse
quelle matière	géométrie	analyse	algèbre
quelle matière	algèbre	analyse	géométrie
quelle matière	$\vdots \downarrow$	$\vdots \downarrow$	$\vdots \downarrow$
	On a $3! = 6$ cas possibles (manières)		

Par suite $\text{card}B = 3! \times 5^1 \times 4^1 \times 3^1 = 6 \times 60 = 360$

Conclusion : $p(B) = \dfrac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \dfrac{3! \times 5^1 \times 4^1 \times 3^1}{12^3} = \dfrac{6 \times 5 \times \cancel{12}}{\cancel{12} \times 12 \times 12} = \dfrac{5}{24}$

3. On calcule $p(C)$ tel que : C « au moins une question en géométrie » .

On calcule $\text{card}C$

C « au moins une question en géométrie » . l'événement contraire de C est $\overline{C}$.

$\overline{C}$ « aucune question en géométrie » on bien :

$\overline{C}$ « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

donc : $\text{card}\overline{C} = 7^3$

D'où : $p(\overline{C}) = \dfrac{\text{card}\overline{C}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{7^3}{12^3} = \left(\dfrac{7}{12}\right)^3$.

Conclusion : $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \left(\dfrac{7}{12}\right)^3 = \dfrac{12^3 - 7^3}{12^3}$

X. Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - les probabilités composées :

A. Probabilité conditionnelle - Deux événements indépendants :

a. Définition :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire .

- Probabilité de l'événement B sachons que l'événement A est réalisé est $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

  on la note par $p_A(B)$ ou par $p\left(B/A\right)$ donc on a $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

- A et B sont deux événements indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ou $p_A(B) = p(B)$.
- $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ l'écriture : $p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$ s'appelle la formule du probabilité composée .

b. Application :

On dispose une urne U contient neuf jetons indiscernables au toucher:

- Trois jetons blancs numérotés 2 ; 2 ; 1.
- Deux jetons jaunes numérotés 1 ; 1.
- Quatre jetons noirs numérotées 1 ; 1 ; 1 ; 2.

❖ On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.

❖ On considère les deux événements suivants :

A « Les jetons tirés ont le même numéro »

B « Les trois jetons tirés de couleurs différents »

1. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ probabilité des événements A et B .
2. Montrer que : $p(A \cap B) = \dfrac{1}{14}$.
3. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
4. Donner la probabilité de l'événement : C « Les jetons tirés ont le même numéro sachant que Les trois jetons tirés sont de couleurs différents ».

Correction :

1. Calculons : $p(A)$ et $p(B)$.

- Calculons : $\text{card}\Omega$:

Le tirage simultanément de 3 jetons parmi 9 jetons représente une combinaison de 3 parmi 9 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 9 donc :

$\text{card}\Omega = C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3} = 84$.

- On calcule $p(A)$:

A « Les jetons tirés ont le même numéro » ou encore
A « Les 3 jetons tirés ont le numéro 1 ou les 3 jetons ont le numéro 2 »

- On calcule $\text{card}A$
  - Les 3 jetons tirés ont le numéro 1 parmi 6 donc $C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} = 20$ manières différentes .
  - Les 3 jetons tirés ont le numéro 2 parmi 3 donc $C_3^3 = 1$ manière .
  - Le tirage simultanément de 3 jetons parmi 5 q jetons représente une combinaison de 3 parmi 5 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 5 donc : $\text{card}A = C_6^3 \times C_3^3 = 20\times1 = 20$.

Conclusion : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_6^3\times C_3^3}{C_9^3} = \frac{20\times1}{84} = \frac{5}{21}$

- On calcule $p(B)$:

B « Les trois jetons tirés de couleurs différents »
B « un jetons blanc et un jeton jaune et un jeton noir »

- On calcule $\text{card}B$
  - un jetons blanc parmi 3 jetons blancs donc $C_3^1 = 3$ manières différentes .
  - un jetons jaune parmi 2 jetons jaunes donc $C_2^1 = 2$ manières différentes .
  - un jetons noir parmi 4 jetons noirs donc $C_4^1 = 4$ manières différentes .
  - donc : $\text{card}B = C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^4 = 24$.

Conclusion : $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^1\times C_2^1\times C_4^4}{C_9^3} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

Conclusion : $p(A) = \frac{5}{21}$ et $p(B) = \frac{2}{7}$

2. Montrons que : $p(A\cap B) = \frac{1}{14}$.

On a : l'événement :
$A\cap B$ « Les jetons tirés ont le même numéro et Les trois jetons tirés de couleurs différents »
Ou encore : $A\cap B$ « Les trois jetons tirés de couleurs différents et ils portent le numéro 1 »

- Un jeton blanc parmi un qui porte le numéro 1 .donc $C_1^1 = 1$
- Un jeton jaune parmi deux qui porte le numéro 1 . donc $C_2^1 = 2$
- Un jeton noir parmi trois qui porte le numéro 1 . donc $C_3^1 = 3$

Donc $\text{card}A\cap B = C_1^1\times C_2^1\times C_3^1 = 6$

D'où : $p(A) = \frac{\text{card}A\cap B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_1^1\times C_2^1\times C_3^1}{C_9^3} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}\times14} = \frac{1}{14}$

Conclusion : $p(A\cap B)=\frac{1}{14}$.

3. On étudie l'indépendance de A et B :

On a : $p(A)\times p(B)=\frac{5}{21}\times\frac{2}{7}=\frac{10}{144}$ et $p(A\cap B)=\frac{1}{14}$ d'où : $p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$

Conclusion : A et B ne sont pas indépendants ou A et B ne sont pas dépendants .

4. Donner la probabilité de l'événement : C « Les jetons tirés ont le même numéro sachant que Les trois jetons tirés sont de couleurs différents ».

Ou encore C « on a l'événement A sachant que B est réalisé » .

D'où $p(C)=p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{2}{7}}=\frac{1}{4}$ Conclusion : $p(C)=\frac{1}{4}$.

B. Probabilité total :

a. Définition :

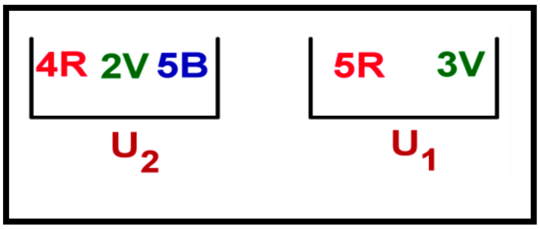
A_1, A_2, A_3 ,....et A_n sont des événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire forme une partition de Ω . (A_1, A_2, A_3 ,....et A_n sont disjoints 2 à 2 et $A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_n=\Omega$.

La probabilité d'un événement B de Ω est :

$$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+p(A_3)p_{A_3}(B)+....+p(A_n)p_{A_n}(B).$$

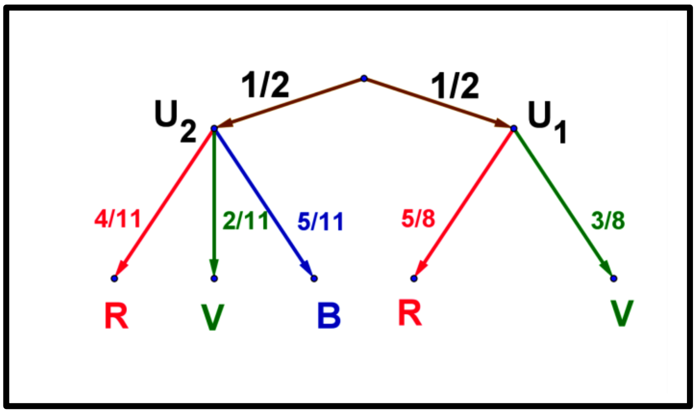
b. Application :

On considère deux urnes U_1 et U_2 tel que :



- U_1 contient 5 pions rouges et 3 pions verts .
- U_2 contient 4 pions rouges et 2 pions verts et 5 pions bleus.
- On choisit au hasard une urne puis on tire un seul pion .
- On considère l'événement V « le tirage donne un pion vert »

1. On construire l'arbre de probabilité :



2. On calcule la probabilité de l'événement V :

On considère les événements suivants :

➢ U_1 « le choix de l'urne U_1 »

- U_2 « le choix de l'urne U_2 »
- l'événement V « le tirage donne un pion vert » ou encore

V « on choisit l'urne U_1 et le tirage donne un pion vert ou on choisit l'urne U_2 et le tirage donne un pion vert »

D'où V est exprimé de la manière suivante : $V=(U_1\cap V)\cup(U_2\cap V)$

Donc : $p(V)=P\left((U_1\cap V)\cup(U_2\cap V)\right)$

$$=p(U_1\cap V)+p(U_2\cap V)$$

$$=p(U_1)p_{U_1}(V)+p(U_2)p_{U_2}(V)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}=\frac{49}{176}$$ **Conclusion :** $p(V)=\frac{49}{176}$

3. Calculons probabilité de l'événement B « le choix de l'urne U_1 sachant qu'on obtenue un pion vert »

On peut écrire : $p(B)$ de la façon suivante :

$$p(B)=p_V(U_2)=p(U_2/V)=\frac{p(U_2\cap V)}{p(V)}=\frac{p(U_2)\times p_{U_2}(V)}{p(V)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}}{\frac{49}{176}}=\frac{16}{49}.$$

XI. Expérience répété plusieurs fois :

a. Activité :

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

- On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
- On considère les deux événements suivants :

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

1. Calculons $p(A)$.

- Calculons : $\text{card}\Omega$:

Le tirage simultanément de 2 boules parmi 6 jetons représente une combinaison de 2 parmi 6 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 2 parmi 6 donc : $\text{card}\Omega=C_6^2=\frac{6\times5}{1\times2}=15$.

- On calcule $p=p(A)$:

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

On calcule $\text{card}A$

- Les deux boules tirés portent des numéros paires parmi 3 (numéros paires sont 2 et 4 et 6) donc $C_3^2=C_3^1=3$ manières différentes .
- $\text{card}A=C_3^2=3$.

Conclusion : $p=p(A)=\frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

2. ..

- ✓ On répète cette expérience 3 fois successives dont les mêmes conditions de départ (c.à.d. avant de répéter l'expérience on remet les 6 boules dans l'urne)
- ✓ On s'intéresse au nombre de fois que l'événement A était réalisé

b. Vocabulaire :

on dit que :

- ✓ l'expérience est répété 3 fois dont les mêmes conditions de départ.
- ✓ l'événement A était réalisé k fois avec $k \in \{0,1,2,3\}$.

c. Propriété :

Soit $p = p(A)$ est la probabilité d'un événement A d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

Soit l'événement C « l'événement A était réalisé k fois après avoir répète cette expérience aléatoire n fois dont les mêmes conditions de départ » avec $k \in \{0,1,2,3\}$.

La probabilité l'événement C est $p(C) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$ et $p = p(A)$.

d. Exemple :

On prend l'activité précédente . On considère l'événement C « l'événement A était réalisé 2 fois après avoir répète cette expérience aléatoire 3 fois dont les mêmes conditions de départ »

On calcule $p(C)$. On a : $p(C) = C_3^2 (p(A))^2 (1-p)^{3-2} = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}$.

XII. Variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type :

A. Variables aléatoire :

a. Activité : On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

- ❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après chaque tirage .

Lorsque le tirage deux boules paires donc le nombre demandé est 0 .

exemple : tirage donne $\omega_1 = \{②,④\}$ le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après ce tirage est 0

Lorsque le tirage une boule paire et l'autre impaire donc le nombre demandé est 1 .

exemple : tirage donne $\omega_2 = \{①,④\}$ le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après ce tirage est 1

Lorsque le tirage deux boules impaires donc le nombre demandé est 2 .

exemple : tirage donne $\omega_3 = \{①,③\}$ le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après ce tirage est 2 .

b. Vocabulaire :

On va relier une relation entre l'ensemble des cas possible c'est-à-dire (c.à.d.) vers l'ensemble $\mathbb{R}$ cette relation sera notée X est appelée variable aléatoire définie de la manière suivante :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$$

; tel que x_i est le nombre des numéros impaire pour chaque tirage ω_i .

- Les nombres 0 et 1 et 2 sont appelés les valeurs de la variable aléatoire X on note $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$, ces nombres constituent un ensemble sera noté $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ est appelé ensemble des valeurs de la variable aléatoire X .dans le cas général on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.
- Tous les cas possibles ω_i (les événements élémentaires) qui sont reliés par x_i forment une partie de Ω cette partie (c'est un événement) sera notée par $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$.
- L'écriture $p(X = x_i)$ signifie probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

c. **Exemple :**

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Soit la variable aléatoire X définie par le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après chaque tirage .

1. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .
2. Calculer la probabilité $p(X=2)$.

Correction :

1. On détermine les valeurs de la variable aléatoire X .

Les valeurs sont :

- Lorsque le tirage deux boules paires donc $x_1 = 0$.
- Lorsque le tirage une boule paire et l'autre impaire donc $x_2 = 1$.
- Lorsque le tirage deux boules impaires donc $x_3 = 2$.

Conclusion : les sont 0 et 1 et 2 ou encore $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

2. On calcule la probabilité $p(X=2)$

On a l'événement $(X=2)$ « les deux boules tir2es portent des num2ros impaires »

- $\text{card}(X=2)$

On tire simultanément 2 boules dont les numéros sont impaires parmi 3 (1et 3 et 5) donc $\text{card}(X=2)=C_3^2=3$.

- $\text{card}\Omega$

On tire simultanément 2 boules parmi 6 donc $\text{card}\Omega = C_6^2 = \dfrac{6\times5}{1\times2} = 15$.

Conclusion : $p(X=2)=\dfrac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega}=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$.

B. Loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

a. **Définition :**

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$

Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X=x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$

b. **Remarque :**

- $p(X=x_1)+p(X=x_2)+p(X=x_3)+\cdots+p(X=x_n)=1$
- On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	.....	x_p	La somme
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	.....	$p(X=x_p)$	1

C. Espérance mathématique - – variance – écart-type d'une variable aléatoire X :

a. Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$

- Le nombre : $\sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p(X=x_i) = x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+\cdots+x_n\times p(X=x_n)$ s'appelle l'espérance mathématique du variable aléatoire X ; on note $E(X)$.
- Le nombre $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$
$=(x_1)^2\times p(X=x_1)+(x_2)^2\times p(X=x_2)+\cdots+(x_n)^2\times p(X=x_n)-[E(X)]^2$ s'appelle la variance du variable aléatoire X ; on note $V(X)$.

Remarque : $V(X)\geq 0$.

- Le nombre : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type ; du variable aléatoire X . on note $\sigma(X)$

b. Exemple :

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:

❖ On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Soit la variable aléatoire X définie par le nombre de fois d'obtenir un numéro impaire après chaque tirage .

1. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .
2. Donner la loi de probabilité X .
3. Calculer l'espérance mathématique de X.
4. Calculer la variance de X puis l'écart-type de X.

Correction :

1. On détermine les valeurs de la variable aléatoire X.
Les valeurs sont : 0 et 1 et 2 (on a déjà traité cette question) .
2. Loi de probabilité de X . La loi de probabilité de X sous forme d'un tableau :

x_i	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=2$	La somme
$p(X=x_i)$	$p(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$	$p(X=1)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3\times3}{15}=\frac{3}{5}$	$p(X=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=1$
$x_i\times p(X=x_i)$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$E(X)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$
$x_i^2\times p(X=x_i)$	0	$1^2\times\frac{3}{5}$	$2^2\times\frac{2}{5}$	

3. L'espérance mathématique de X.
D'après le tableau on a :

$$E(X)=x_1\times p(X=x_1)+x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)=0+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$$

Conclusion : $E(X)=1$.

4. la variance de X puis l'écart-type de X.

- la variance de X

On a :

$$V(X)=(x_1)^2\times p(X=x_1)+(x_2)^2\times p(X=x_2)+\cdots+(x_n)^2\times p(X=x_n)-[E(X)]^2$$

$$=0+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{2}{5}-1^2=0$$

Conclusion : $V(X)=0$

- l'écart-type de X.

On a : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0}=0$.

XIII. Loi binomiale ou distribution binomiale :

a. Propriété et définition :

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois)
- On répète cette expérience n fois (dont les mêmes conditions de départ)
- On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »
- Ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{0,1,2,...,n\}$
- X est appelé loi binomiale (ou distribution) de paramètres n et p on note $X=B(n,p)$

b. Exemple :

On dispose une urne U contient six boules indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 6:
- On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
- On considère les deux événements suivants :

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

1. Calculons $p(A)$.
2. Soit X la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après avoir répéter de l'expérience de départ 4 fois »

On considère l'événement C « l'événement A était réalisé 3 fois après avoir répète cette expérience aléatoire 4 fois dont les mêmes conditions de départ »

Calculer $p(C)$ puis donner espérance mathématique de X.

On a : $p(C)=C_3^2(p(A))^2(1-p)^{3-2}=3\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$.

Correction :

1. On calcule : $p(A)$

- Calculons : $\text{card}\Omega$:

Le tirage simultanément de 2 boules parmi 6 jetons représente une combinaison de 2 parmi 6 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 2 parmi 6 donc :

$$\text{card}\Omega=C_6^2=\frac{6\times5}{1\times2}=15.$$

- On calcule $p=p(A)$:

A « Les deux boules tirés portent des numéros paires »

On calcule $\text{card}A$

- **Les deux boules tirés portent des numéros paires** parmi 3 (numéros paires sont 2 et 4 et 6) donc $C_3^2 = C_3^1 = 3$ manières différentes .
- $\text{card}A = C_3^2 = 3$.

Conclusion : $p = p(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \dfrac{C_3^2}{C_6^2} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

2. .. On calcule $p(C)$ puis donner espérance mathématique de X .

On remarque :

- X est une loi binomiale (ou distribution) de paramètres $n = 4$ et $p = p(A) = \dfrac{1}{5}$ on note $X = B\left(4, \dfrac{1}{5}\right)$.
- $C = (X = 3)$ d'où : $p(C) = p(X = 3) = C_4^3 \left(p(A)\right)^3 (1-p)^{4-3} = 4\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^1 = \dfrac{16}{625}$.

Conclusion : $p(C) = p(X = 3) = \dfrac{16}{625}$