Probabilité

I – Vocabulaires

II – Probabilité d'un évènement

III - Probabilité conditionnelle

IV – Variables aléatoires

V – Loi binomiale

AHMED AGOUZAL

Probabilité

I – Vocabulaires

1 – Exemple

Lançons un dé, a l'arrêt, sa face supérieure porte l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Si le dé est non truqué (on dit encore bien équilibré ou parfait). Nous sommes incapables de prévoir quelle face va apparaître. Nous sommes en présence d'une expérience aléatoire.

1, 2, 3, 4, 5 ou 6 sont les résultats ou les cas possibles ou les issues ou les éventualités.

L'ensemble des éventualités est l'univers Ω. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Remarque: Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé bien équilibré, le tirage des boules simultanément ou successivement avec remise ou sans remise… sont des expériences aléatoires, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat. Le résultat dépend en effet du hasard.

AHMED AGOUZAL

Probabilité

2 – Evénement

Considérons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers ou ensemble des éventualités de cette expérience.

L'événement $A = \{1, 3, 5\}$ est une partie de Ω est l'événement "Obtenir un nombre impair"

$B = \{2, 4, 6\}$ est l'événement "Obtenir un nombre pair"

L'univers Ω est l'événement certain.

L'ensemble vide ϕ est l'événement impossible.

3 – Evénement élémentaire

$C = \{3\}$ est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité.

On dit que c'est un événement élémentaire.

AHMED AGOUZAL

Probabilité

4 – Evénement incompatible

l'événement A "Obtenir un nombre impair" et soit l'événement D ={4, 6}.
Aucune éventualité ne réalise simultanément A et D; on dit que A et D sont incompatibles et on note $A \cap D = \phi$

5 – Evénement contraire

Soit E "Obtenir un nombre premier" donc E = {2, 3, 5}
On note $\overline{\mathbf{E}}$ l'événement contraire de E dans Ω c'est-à-dire "obtenir un nombre non premier".
On a E = {2, 3, 5} donc $\overline{\mathbf{E}} = \{1, 4, 6\}$
On a $\mathbf{E} \cup \overline{\mathbf{E}} = \Omega$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

II- Probabilité

1 – Définition

Soit *E* une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités est
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

- A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est associé un nombre réel, **élément de [0;1]** appelé probabilité de l'événement élémentaire tel que : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \ldots + p(\{\omega_n\}) = 1$
- La probabilité de tout événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- $p(\Omega) = 1$.
- Si $A = \phi$ alors $p(A) = 0$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

2 – L'hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même Probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme: ″On tire au hasard", ″boules indiscernables au toucher", "dé bien équilibré", "dé non pipé" …

propriété

Soit p une probabilité sur un univers Ω
Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le nombre total d'éventualités étant *n*, si un événement A est constitué de *m* éventualités alors sa probabilité est : $\mathbf{p(A)=\frac{m}{n}}$

$$\mathbf{p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

card(A) le nombre de cas favorables
card(Ω) le nombre de cas possibles

AHMED AGOUZAL

Probabilité

3 – Propriétés des probabilités

Parties de E	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
$\varnothing$ E	Evénement impossible Evénement certain	$p(\varnothing) = 0$ $p(E) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement contraire de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

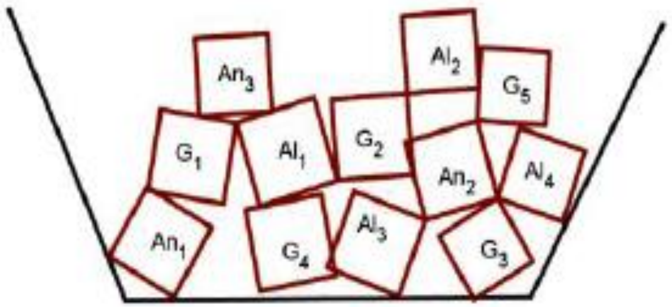
AHMED AGOUZAL

Probabilité

4 – Exemple

Un examen oral de mathématique comporte 5 questions en géométrie, 4 questions en algèbre et 3 questions en analyse.
1)L'étudiant **tire simultanément 3 questions** d'un sac contenant les 12 questions.

Calculer la probabilité des événements suivants:
A « les trois questions sont en géométrie »
B « une seule question pour chaque matière »
C « au moins une question en géométrie »



2)L'étudiant **tire les 3 questions** **l'une après l'autre sans remise**
Calculer la probabilité des événements A, B et C.

3)L'étudiant **tire les 3 questions** **l'une après l'autre avec remise**
Calculer la probabilité des événements A, B et C.

AHMED AGOUZAL

Solution:

Probabilité

5 géométrie ; 4 algèbre ; 3 analyse

1) Tirage simultané de 3 boules parmi 12

$\text{Card}(\Omega) = C_{12}^{3} = 220$ calculatrice 12 ncr 3 = 220

$\text{Card}(A) = C_5^3 = 10$ Donc $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$ d'où $p(A) = \frac{1}{22}$

$\text{Card}(B) = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$ Donc $p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$ d'où $p(B) = \frac{3}{11}$

Première méthode

$\text{Card}(C) = C_5^1 \times C_7^2 + C_5^2 \times C_7^1 + C_5^3 = 185$ Donc $p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$ d'où $p(C) = \frac{37}{44}$

Deuxième méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

$\overline{C}$ « aucune question en géométrie » c'est-à-dire $\overline{C}$ « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

$\text{Card}(\overline{C}) = C_7^3 = 35$ donc $p(\overline{C}) = \frac{\text{card}(\overline{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$

On sait que $p(C) = 1 - p(\overline{C})$ donc $p(C) = 1 - \frac{7}{44}$ d'où d'où $p(C) = \frac{37}{44}$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

2) L'étudiant tire les 3 questions l'une après l'autre sans remise

Tirage successif de 3 boules sans remise parmi 12

$\text{Card}(\Omega) = A_{12}^{3} = 1320$ calculatrice 12 npr 3 = 1320

$\text{Card}(A) = A_5^3 = 60$ Donc $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{60}{1320} = \dfrac{1}{22}$ d'où $p(A) = \dfrac{1}{22}$

$\text{Card}(B) = 3!(A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1) = 360$ Donc $p(B) = \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{360}{1320} = \dfrac{3}{11}$ d'où $p(B) = \dfrac{3}{11}$

Première méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

$\overline{C}$ « aucune question en géométrie »

$\text{Card}(\overline{C}) = A_7^3 = 210$ donc $p(\overline{C}) = \dfrac{\text{card}(\overline{C})}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{210}{1320} = \dfrac{7}{44}$

On sait que $p(C) = 1 - p(\overline{C})$ donc $p(C) = 1 - \dfrac{7}{44}$ d'où d'où $p(C) = \dfrac{37}{44}$

Deuxième méthode

$\text{Card}(C) = 3(A_5^1 \times A_7^2) + 3(A_5^2 \times A_7^1) + A_5^3 = 1110$

Donc $p(C) = \dfrac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{1110}{1320} = \dfrac{37}{44}$ d'où $p(C) = \dfrac{37}{44}$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

3) L'étudiant **tire les 3 questions l'une après l'autre avec remise**

Tirage successif de 3 boules avec remise parmi 12

$$\mathrm{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$$

$\mathrm{Card}(A) = 5^3 = 125$ Donc $p(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{125}{1728}$ d'où $p(A) = \dfrac{125}{1728}$

$\mathrm{Card}(B) = 6(5^1 \times 4^1 \times 3^1) = 360$ Donc $p(B) = \dfrac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{360}{1728} = \dfrac{5}{24}$ d'où $p(B) = \dfrac{5}{24}$

Première méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

$\overline{C}$ « aucune question en géométrie »

$\mathrm{Card}(\overline{C}) = 7^3 = 343$ donc $p(\overline{C}) = \dfrac{\mathrm{card}(\overline{C})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{343}{1728}$

On sait que $p(C) = 1 - p(\overline{C})$ donc $p(C) = 1 - \dfrac{343}{1728}$ d'où d'où $p(C) = \dfrac{1385}{1728}$

Deuxième méthode

$\mathrm{Card}(C) = 3(5^1 \times 7^2) + 3(5^2 \times 7^1) + 5^3 = 1385$ Donc $p(C) = \dfrac{\mathrm{card}(C)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{1385}{1728}$ d'où $p(C) = \dfrac{1385}{1728}$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

Exercice

Dans une urne se trouve 9 jetons :
Quatre jetons rouges numérotés 0;1;1;2 et trois jetons verts numérotés 1; 2; 2 et deux jetons noirs numérotés 1; 3

1) On tire simultanément et au hasard trois jetons de l'urne

   On considère les évènements suivants:

A ″ Obtenir 3 jetons verts ″ ; B ″ Obtenir 3 jetons de même couleurs ″
C ″ Obtenir 3 jetons de couleurs différents ″
D ″ Obtenir 3 jetons qui portent le même numéro″
E ″ Obtenir au moins un jeton qui porte le numéro 1″
F ″ Obtenir au plus un jeton vert ″
G ″ Obtenir 3 jetons de couleurs différents deux à deux″
Déterminer La probabilité des évènements A; B; C; D; E; F; G.

2) Même question pour le tirage successif de trois jetons avec remise.
3) Même question pour le tirage successif de trois jetons sans remise.

AHMED AGOUZAL

Probabilité

IV – Probabilité conditionnelle

1) Définition:

Soient les évènements A et B d'un univers Ω .

La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre réel noté $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ donc $\mathbf{P_A(B)} = \dfrac{\mathbf{p(A \cap B)}}{\mathbf{p(A)}}$; $p(A) \neq 0$

<u>Remarque :</u>

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles $p(A/B)$ et $p(B/A)$ sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$.

2) Evénements indépendants:

A et B deux événements de probabilité non nulle.

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

Exemple

une urne U contient neuf jetons indiscernables au toucher:

- **Trois jetons blancs numérotés 2 ; 2 ; 1.**
- **Deux jetons jaunes numérotés 1 ; 1.**
- **Quatre jetons noirs numérotées 1 ; 1 ; 1 ; 2.**

On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
On considère les deux événements suivants :

A « Les trois jetons tirés ont le même numéro »
B « Les trois jetons tirés de couleurs différents deux à deux »

1. **Calculer $p(A)$ et $p(B)$ probabilité des événements A et B .**
2. **Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.**
3. **Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?**
4. Donner la probabilité de l'événement C« Les jetons tirés ont le même numéro sachant que les trois jetons tirés de couleurs différents deux à deux »

AHMED AGOUZAL

Probabilité

Solution:

Trois B : 2 ;2 ;1 ; Deux J : 1;1 Quatre N :1 ;1 ;1 ;2

1)

Tirage simultané de 3 jetons parmi 9 6 (1) 3 (2)

$$\mathrm{Card}(\Omega)=C_9^3=84$$

$$\mathrm{Card}(A)=C_6^3+C_3^3=21 \text{ Donc } p(A)=\frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4} \quad \text{d'où } p(A)=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Card}(B)=C_3^1\times C_2^1\times C_4^1=24 \text{ Donc } p(B)=\frac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7} \quad \text{d'où } p(B)=\frac{2}{7}$$

2) On a

$$\mathrm{Card}(A\cap B)=C_1^1\times C_2^1\times C_3^1=6 \quad p(A\cap B)=\frac{\mathrm{card}(A\cap B)}{\mathrm{card}(\Omega)}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14} \quad p(A\cap B)=\frac{1}{14}$$

3) On a

$$p(A\cap B)=\frac{1}{14} \quad \text{et} \quad p(A)\times p(B)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{14}$$

D'où $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ d'où A et B sont indépendants.

4) C « Les trois jetons tirés ont le même numéro sachant que les jetons tirés sont de couleurs différents deux à deux»

$$P(C)=P_B(A) \quad \text{donc} \quad P(C)=P_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{7}}=\frac{7}{8} \quad \text{d'où} \quad P(C)=\frac{7}{8}$$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

IV – Variables aléatoires

Dans toute la suite Ω désigne l'univers associé à chaque expérience aléatoire.

1) Exemple introductif:

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.
On tire simultanément 2 boules. On perçoit un Dirham par boule rouge tirée.
Quels sont les gains possibles ? Avec quelles probabilités ?
On peut tirer 0, 1 ou 2 boules rouges, et donc gagner 0, 1 ou 2 Dirhams.
Désignons par X la somme perçue. La probabilité que X soit égal à 0 est noté $p(X=0)$;
elle est égale à la probabilité de l'événement « tirer 0 boule rouge et 2 boules blanches» ;

$$p(X=0)=\frac{C_3^0\times C_4^2}{C_7^2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

La probabilité que X soit égal à 1 est noté p(X=1) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 1 boule rouge et 1 boules blanches » ;

$$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \;;$$

La probabilité que X soit égal à 2 est noté p(X=2) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 2 boules rouges et 0 boule blanche » ;

$$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_4^0}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \,.$$

Ces résultats peuvent se présenter dans un tableau, la première ligne indiquant les valeurs possibles x de X.

x	0	1	2
$p(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Ce tableau définit la loi de probabilité de X.

AHMED AGOUZAL

Probabilité

2) Variable aléatoire - Loi de probabilité:

a) Définition 1 :

On appelle variable aléatoire X réelle toute application de Ω dans $\mathbb{R}$, qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Notons $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X. $X(\Omega) = \{ x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n \}$.

b) Définition 2 :

La loi de probabilité de X est la fonction qui à tout élément x de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x. Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x » et que l'on note : $p(X = x)$.

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau

x	x_1	x_2	…….	x_n
$p(X = x)$	p_1	p_2	…….	p_n

Conseil : Lorsqu'on calcul une loi de probabilité d'une variable aléatoire, il est indispensable de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

AHMED AGOUZAL

Probabilité

3 - Espérance mathématique

a) Définition

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1; x_2; \ldots\ldots.; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; \ldots\ldots.; p_n$. On appelle espérance mathématique de X le nombre réel positif noté E(X) et défini par: $\mathbf{E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}$

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i}$$

Dans la pratique, la loi de probabilité étant donnée par un tableau :

x	x_1	x_2	…….	x_n
$p(X = x)$	p_1	p_2	…….	p_n

Il suffit de calculer la somme : $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots\ldots + x_n\,p_n$.

b) Exemple

Pour l'exemple introductif on a $E(X) = 0\times p(X=0) + 1\times p(X=1) + 2\times p(X=2) = \frac{6}{7}$.

AHMED AGOUZAL

Probabilité

4 - Variance - Ecart type

a) Définition de la variance

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1; x_2; …….; x_n avec les probabilités p_1; p_2; …….; p_n . On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) et défini par:

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i\,(x_i - E(X))^2$$

b) Autre expression de la variance

$$V(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i\,(x_i)^2 - (E(X))^2$$

AHMED AGOUZAL

Probabilité

c) Ecart-type:

Pour tout variable aléatoire X , On appelle écart-type de X le nombre réel positif

noté σ(X) et défini par: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

d) Exemple:

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément de l'urne 3 boules et l'on considère la variable aléatoire X définie par « nombre de boules noires parmi les boules tirées ».

a) Quelles sont les valeurs prises par X?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Probabilité

Solution:

a) $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$$P(X=0) = P_1 = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56} \; ; \; P(X=1) = P_2 = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} \; ;$$

$$P(X=2) = P_3 = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56} \; ; \; P(X=3) = P_4 = \frac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56} \; .$$

b) Loi de probabilité

X	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

c) L'Espérance mathématique $E(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, x_i = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots\dots\dots + P_n x_n$.

$$E(x) = 0 \times \frac{10}{56} + 1 \times \frac{30}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{63}{56} = \frac{9}{8}.$$

La variance est $V(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - E(x))^2$.

$$V(X) = P_1\left(x_1 - \frac{9}{8}\right)^2 + P_2\left(x_2 - \frac{9}{8}\right)^2 + \dots\dots + P_4\left(x_4 - \frac{9}{8}\right)^2 \; ;$$

$$V(X) = \frac{10}{56}\left(0 - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{30}{56}\left(1 - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{15}{56}\left(2 - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{1}{56}\left(3 - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{1800}{3584} = 0{,}5.$$

L'Ecart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}5} = 0{,}20$.

Probabilité

V – Loi binomiale

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire

On répète cette épreuve n fois de suite

La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p

Et on a : $\forall k \in \{0;1;2;3;...;n\}$; $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-\mathrm{p})^{n-k}$

Et $\mathrm{E}(X) = n \times p$

Et $v(X) = n \times p \times (1-p)$

Exemple:

1) On lance une fois un dé cubique équilibré et on considère l'événement suivant:

A « On obtient un diviseur de 3 » calculer p(A)

2) On répète cette épreuve quatre fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois la réalisation de l'événement A

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique et la variance de X

AHMED AGOUZAL

Probabilité

Solution:

1)Les diviseurs de 3 sont 1 et 3

donc $p(A) = \frac{1}{3}$

2) X est une variable aléatoire binomiale de paramètre 4 et p(A).

$$p(X=k) = c_4^k (p(A))^k (1-p(A))^{4-k} \qquad k \in \{0 ;1 ;2 ;3 ;4\}$$

k	0	1	2	3	4	Total
P(X = k)	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

E(X)= 4×p(A) et V(X) = 4×p(A)(1 – p(A))

$E(X) = \frac{4}{3}$ et $E(X) = \frac{8}{9}$

AHMED AGOUZAL