

# Resumé sur Les probabilités

## Définitions

**Expérience aléatoire** : protocole précis dont on ne peut prévoir l'issue (nombre fini d'issues) :

- Lancer un dé, tirer deux boules d'une urne, prendre un lycéen au hasard, etc.

$\Omega$  : l'**univers**, ensemble des  $n$  issues d'une expérience aléatoire.

- Pour un dé  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A$  : **événement**, sous-ensemble de l'univers  $\Omega$ .

- « obtenir un nombre supérieur à 3 avec un lancé de dé »

$e_i$  : **événement élémentaire**, singleton de  $\Omega$ .

- Il y a  $n$  événements élémentaires pour les  $n$  issues possibles d'une expérience.

$\emptyset$ , **événement impossible** : « Obtenir un 7 avec un dé »

## Probabilité et opérations logiques

Soit  $p$  une loi de probabilité sur  $\Omega$ .

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

On en déduit :  $p(\emptyset) = p(\bar{\Omega}) = 1 - 1 = 0$

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

## Opération sur les événements

- $\bar{A}$  : « A barre », événement contraire à  $A$  (non  $A$ )

- $A \cap B$  : « A inter B », événement dont les éléments sont les issues communes à  $A$  et  $B$ .

Si  $A \cap B = \emptyset$ , les événements sont incompatibles

- $A \cup B$  : « A union B », événement dont les éléments sont les issues de  $A$  ou (non exclusif) de  $B$ .

$A \cup \bar{A} = \Omega$  et  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , les événements  $A$  et  $\bar{A}$  forment une partition de  $\Omega$

## Loi de probabilité

La **loi de probabilité** sur l'ensemble  $\Omega$  est la fonction  $p$  à valeur dans  $[0; 1]$  définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = \sum_{i=1}^n p(e_i) = 1$

**Remarque** : Définir une loi de probabilité revient à déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

⚠ Bien définir l'expérience et l'univers sur lequel on travaille (cf paradoxe du Duc de Toscane)

## Règle sur un arbre pondéré

- Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes. ⚠ pas de pourcentage.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement.

## Les probabilités

## Paramètres d'une variable aléatoire

- Espérance :  $E(X) = \sum x_i p_i$
- Variance :  $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X)$
- Écart-type :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Cas particulier** : Si  $E(X)$  représente un gain moyen, le jeu est équitable si  $E(X) = 0$ , favorable au joueur si  $E(X) > 0$  et défavorable au joueur si  $E(X) < 0$

## Variable aléatoire

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur un univers  $\Omega$  avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

**Loi de probabilité de  $X$**  : on pose  $p_i = p(X = x_i)$

$X = x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$\sum p_i$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	1

## Cas d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

### La loi binomiale - Incontournable

- On reconnaît un **schéma de Bernoulli** lorsque l'on répète de manière identique et indépendante une expérience aléatoire dont on se préoccupe de deux événements : le **succès** de probabilité  $p$  et l'**échec** de probabilité  $q = 1 - p$ .
- Si l'on note  $X$  la variable aléatoire associée au nombre de succès sur ces  $n$  expériences,  $X$  suit **une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$**  notée  $\mathcal{B}(n, p)$ .

**Notations compactes possibles :**  $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$  ou  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

On retient : probabilité d'obtenir exactement  $k$  succès sur  $n$  expériences :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

(binomFdp( $n, p, k$ ) avec la calculatrice).

Dans ce cas :  $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1 - p)$  et  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

**Quelques cas courants :** on suppose que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- Au moins 1 succès :  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$
- Au plus 1 succès :  $p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$
- Entre 30 et 45 succès :  $p(30 \leq X \leq 45) = p(X \leq 45) - p(X \leq 29)$

Pour calculer  $p(X \leq k)$ , on utilise la fonction de répartition de la loi binomiale.  
(binomFRép( $n, p, k$ ) avec la calculatrice).

### Coefficients binomiaux

- Pour  $0 \leq k \leq n$ , le coefficient  $\binom{n}{k}$  est appelé « coefficient binomial ».

Il correspond au nombre de possibilités de placer  $k$  succès sur  $n$  expériences.

**Propriété :** Les coefficients binomiaux sont symétriques

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} : \text{placer } k \text{ succès revient à placer } (n - k) \text{ échecs.}$$

Deux cas particuliers :  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  et  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

- Triangle de Pascal** (1623-1662)

On peut établir une liste de coefficients binomiaux grâce à la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

On obtient alors ce qu'on appelle le triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

**Démonstration :**

Lorsque l'on veut placer  $(k + 1)$  succès sur  $(n + 1)$  expériences :  $\binom{n+1}{k+1}$

— Soit on a un succès sur la 1<sup>re</sup> expérience, on doit alors placer  $k$  succès sur les  $n$  expériences restante :  $\binom{n}{k}$

— Soit on a un échec sur la 1<sup>re</sup> expérience, on doit alors placer  $(k + 1)$  succès sur les  $n$  expériences restante :  $\binom{n}{k+1}$