# PRODUIT SCALAIRE de l'espace

**Leçon : PRODUIT SCALAIRE dans l'espace**
**Présentation globale**

**1) Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace**
**2) Vecteurs orthogonaux**
**3) Produit scalaire et norme**
**4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace**
**5) analytique du produit scalaire dans l'espace**
**6) L'ensemble des points dans l'espace tq :** $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$
**7) Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal**
**8) positions relatifs de deux plans dans l'espace**
**9) distance d'un point à un plan**
**10) Etude analytique de LA SPHERE**

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

## 1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

**Définition 1 :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Et soient $A$ ; $B$ et $C$ trois points l'espace tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $ABC$, noté $\vec{u}.\vec{v}$

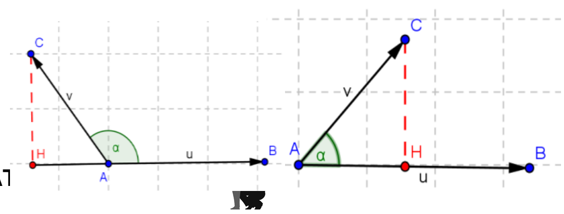
**remarques:** 1) $\vec{u}.\vec{v}$ est un **nombre réel** définit par

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$ et alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$

c a d $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire

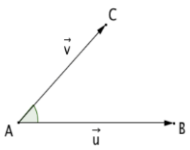



2)toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace

**Définition2 :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

- $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.




$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

## 2)Vecteurs orthogonaux

**Définition :** On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Et on écrit : $\vec{u}\perp\vec{v}$

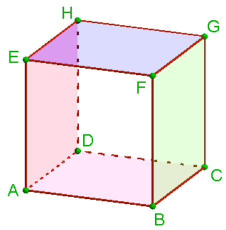
**Exemple :** Soit ABCDEFGH un cube de côté a
Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$ ; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$

**Réponse :**1)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$ :on a : $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EA}$ car ABCDEFG cube

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}=-AE\times AE=-a^2$

(car $E$ est le projeté orthogonales de $F$ sur $(AE)$)




2)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$ :

Puisque ABCD est un carré on a :

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

donc : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BA}=-AB\times AB=-a^2$

(car $B$ est le projeté orthogonales de $F$ sur $(AB)$)

3)calcul de $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$ : Puisque DCGH est un carré on a :

$\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}=0$ ( $\overline{DH}\perp\overrightarrow{DC}$ )

4)calcul de $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$ :

$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HD}=0$ ( $\overline{DH}\perp\overrightarrow{EH}$ )

donc : $\overline{EH}\perp\overrightarrow{GC}$

5)calcul de $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$ :

On a : $(AE)\perp(ABC)$ donc $(AE)\perp(DB)$ car $(DB)\subset(ABC)$ donc : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}=0$

## 3) Produit scalaire et norme

**3-1 Définition:** Soit un vecteur $\vec{u}$ de l'espace.et deux points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} \quad \text{et } \vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$$

**3-2) propriétés :**Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace., on a :

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{u}.(k\vec{v})=k\vec{u}.\vec{v}$, avec $k$ un nombre réel.

3) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ 4) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

5) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ 6) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

7) $\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ 8) $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$

9) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

10) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ 11) $|\vec{u}.\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

12)Soit A, B et C trois points de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

**Application :** 1) Soit A , B et C des points de l'espace tel que $AB=\sqrt{5}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$

Calculer $\left(-2\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{BC}$ :

**Solution :**

$\left(-2\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2-2\times3$

$=2AB^2-2\times3=2\times5-6=4$

2) sachant que $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ :

On a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(5^2-4-9^2\right)=6$

## 4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

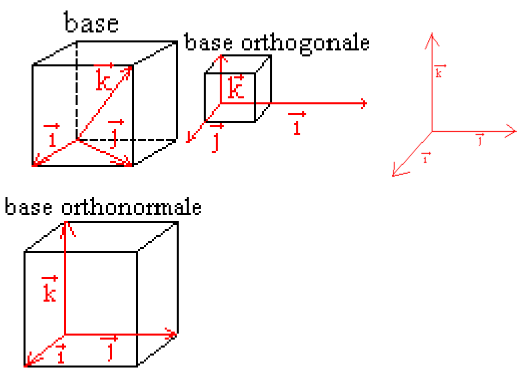
On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{0I}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{0J}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{0K}$

**Définition1 :** on dit qu'un triplet $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$de vecteur dans l'espace est base orthonormé si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires et normés et orthogonaux deux a deux c a d : $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$ et $\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{j}.\vec{k}=0$ et $\vec{i}.\vec{k}=0$

**Définition2 :** on dit que$\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé dans l'espace et seulement si $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormé

**Exemples :**

(La figure représente un cube dans les trois cas)




**Coordonnées d'un vecteur relativement à une base :**

si $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormé et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace alors Il existe un triplet unique (x ; y ; z ) de réels tels que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Ce triplet (x ; y ; z ) est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$ relativement à la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Voyons maintenant comment exprimer le produit scalaire dans l'espace à l'aide des coordonnées des vecteurs.

## 5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormée

(Dans tout ce qui va suivre)

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace

$\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}+zz'\vec{k}\vec{k}$ car $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{j}.\vec{k}=0$ et $\vec{i}.\vec{k}=0$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ puisque: $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$ et $\|\vec{k}\|=1$

On a donc la propriété suivante :

**Propriété :**

1)Dans une base orthonormé on considère deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2)Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soient A et B de coordonnées respectives $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$

alors : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

**Exemple :** dans une base orthonormé $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}(1;5;-1)$ et $\vec{v}(-5;1;0)$ et $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

1)Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux ?

2)Calculer :la norme du vecteur $\vec{w}$

**Solution :** 1)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-5)\times1+1\times5+0\times(-1)=(-5)+5=0$

Donc : $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$ on dit que $\vec{w}$ est un vecteur unitaire

**Exercice1 :** dans une base orthonormé $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}(3;-2;1)$ et $\vec{v}(2;1;0)$

**Calculer :** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$

**Solution :** $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}=\frac{4}{\sqrt{70}}$

## 6) L'ensemble des points dans l'espace tq : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$

Propriété :soit $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $k\in\mathbb{R}$

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans l'espace tq : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

**Preuve :** $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A)$

$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=k$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A+k)=0$

L'ensemble des points dans l'espace tq : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme :

$ax+by+cz+d=0$ avec : $d=-(ax_A+by_A+cz_A+k)$

**Exemple :** soit $\vec{u}(2;1;-1)$ un vecteur et $A(1;-1;2)$ un point de l'espace

Déterminer L'ensemble $(P)$ des points $M(x;y;z)$ dans l'espace tq : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

**Solution :** soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

$M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

$\Leftrightarrow 2(x-1)+(y+1)-(z-2)=-1\Leftrightarrow 2x+y-z+2=0$

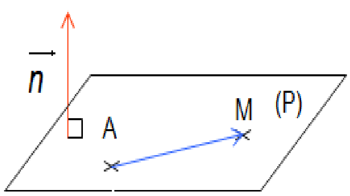
Cette équation s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$

Donc : L'ensemble des points dans l'espace tq : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$ est le plan $(P)$ d'équation : $2x+y-z+2=0$

## 7) Equation cartésienne d'un plan definit par un point et un vecteur normal

**Définition :**

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathscr{P}$ si, pour tous points $A$ et $M$ de $\mathscr{P}$, on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$




**Remarque :** Il existe évidemment une infinité de vecteurs normaux à un plan : ce sont tous les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{n}$.

**Propriété :**Un vecteur est dit normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

**Remarque :** Cette propriété va nous permettre d'une part de vérifier facilement qu'un vecteur est normal à un plan et, d'autre part, de déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan.

**Démonstration :**

La propriété directe découle de la définition. Nous n'allons donc prouver que la réciproque.

Soient $\vec{u}$et $\vec{v}$deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathscr{P}$, $\vec{w}$ un vecteur de $\mathscr{P}$et $\vec{n}$un vecteur orthogonal à $\vec{u}$et $\vec{v}$. Il existe donc deux réels $a$et $b$tels que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

Ainsi $\vec{w}.\vec{n}=a\vec{u}.\vec{n}+b\vec{v}.\vec{n}=0$

Le vecteur $\vec{n}$est donc orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathscr{P}$. Il lui est par conséquent orthogonal.

**Exemple1 :** déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2;-1;3)$ et $\vec{v}(4;0;2)$

**Solution :**Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.

On note . $\vec{n}(x;y;z)$

Puisque $\vec{n}$est normal au plan dirigé par $\vec{u}$et $\vec{v}$alors $\vec{u}.\vec{n}=0$ et $\vec{u}.\vec{n}=0$.

On obtient ainsi les deux équations $2x-y+3z=0$ et $4x+2z=0$

A l'aide de la deuxième équation, on obtient . $z=-2x$ On remplace dans la première :

$2x-y-6x=0\Leftrightarrow -4x-y=0\Leftrightarrow y=-4x$.

On choisit, par exemple $x=1$et on trouve ainsi . $\vec{v}(1;-4;-2)$

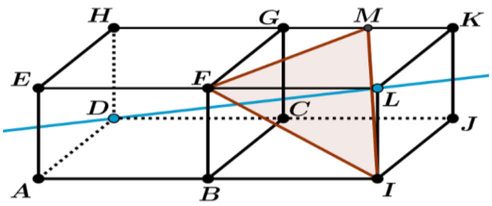
On vérifie : $\vec{u}.\vec{n}=2+4-6=0$✓ et $\vec{v}.\vec{n}=4+0-4=0$✓.

Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{n}(1;-4;-2)$

**Exemple2 :**Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?




**Solution :** on se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ orthonormé

Voyons si $\overrightarrow{DL}$ est un vecteur normal au plan (FMI)

Il suffit de calculer: $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI}$

On a : $\overrightarrow{DL}=-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ donc : $\overrightarrow{DL}(2;-1;1)$

On a : $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FM}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

On a : $\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FI}(1;0;-1)$

$\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM}=0$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI}=1\neq 0$

Donc : (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI)

**Exercice2 :** $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec $I$ le milieu du segment $[EH]$ et $J$ le milieu de $[EF]$

1)Montrer que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=0$ et que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=0$

2) En déduire que le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est normal au plan $(BDE)$

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

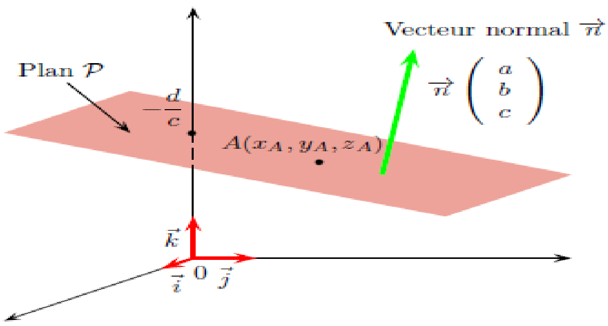
4)l'espace étant rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

a) déterminer les coordonnées des points $F$ ; $C$ ; $I$ et $J$

B)Montrer que $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$

et en déduire que $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

**Propriété :**Soient $a$ et $b$ et $c$ des réels non tous nuls quelconque . L'ensemble $(P)$ des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a;b;c)$.




**Exemple1 :** On considère le plan d'équation $4x-2y+3z-1=0$ . Un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}(4;-2;3)$. Le point $A(2;-1;-3)$ appartient au plan car :

$4\times 2-2\times(-1)+3\times(-3)-1=0$.

**Exemple2 :** On cherche une équation du plan $\mathscr{P}$passant par $A(4;2;-3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1;-2;-1)$ :

Une équation du plan $\mathscr{P}$est de la forme . $x-2y-z+d=0$

Le point $A$ appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$4-2\times 2-(-3)+d=0\Leftrightarrow 3+d=0\Leftrightarrow d=-3$

Une équation de $\mathscr{P}$est donc $x-2y-z-3=0$

**Exemple3:** $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec $I$ le milieu du segment $[AE]$

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1) déterminer un vecteur normal au plan $(CHI)$

2) En déduire une équation cartésienne du plan $(CHI)$

**Solution :1)**soit un $\vec{n}(x;y;z)$ un vecteur normal au plan $(CHI)$ donc $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{CH}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{CI}=0\end{cases}$

On a : $\overrightarrow{CH}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{CI}\left(-1;-1;\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\begin{cases}-x+z=0\\ -x-y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=x\\ -x-y+\frac{1}{2}x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=x\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$

Puisque on veut un seul vecteur normal

Alors on donne par exemple : $x=2$ on trouve

$\begin{cases}z=2\\ y=1\end{cases}$ donc un vecteur normal est $\vec{n}(2;-1;2)$

2)l'équation du plan s'écrit sous forme :

$ax+by+cz+d=0$

Donc : $2x-y+2z+d=0$

Et puisque : $C(1;1;0)\in(CIH)$ donc :

$2-1+0+d=0\Leftrightarrow d=-1$

Donc : $(CIH)$: $2x-y+2z-1=0$

**Exercice3 :** déterminer un vecteur normal au plan $(P)$ dans les cas suivants

1) $(P)$ : $2x-3y+z+10=0$ 2) $(P)$ $3x-z+1=0$

3) $(P)$ $y+z+1=0$ 4) $(P)$ $z=2$

5) $(P)$: $x-2y+7z-3=0$ 6) $(P)$: $2y-z+11=0$

**Solution :**1) $\vec{n}(2;-3;1)$ 2) $\vec{n}(3;0;-1)$ 3) $\vec{n}(0;1;1)$

4) $\vec{n}(0;0;1)$ 5) $\vec{n}(1;-2;7)$ 6) $\vec{n}(0;2;-1)$

**Exercice4:** L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points $A(-1;0;2)$ et $B(3;1;0)$ et le vecteur $\vec{n}(1;2;1)$

1)déterminer une équation du plan $(P)$ passant par $A$ dont un vecteur normal est $\vec{n}$

2)donner une représentation paramétrique de la droite $(D)$ qui passe par le point $B$ et orthogonale au plan $(P)$

3)Déterminer les coordonnées du point $B'$ la projection orthogonale de $B$ sur le plan $(P)$

**Solution :**1) <u>*méthode :*</u>

$M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

on a : $\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-2)$

$\Leftrightarrow(x+1)\times1+y\times2+1\times(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x+1+2y+z-2=0$

Donc : $x+2y+z-1=0$ $(P)$

<u>*Autre méthode :*</u>

L'équation d'un plan s'écrit sous forme :

$ax+by+cz+d=0$ or $\vec{n}(1;2;1)$ est un vecteur normal à ce plan donc : $a=1$ et $b=1$ et $c=1$

Donc L'équation devient : $1x+2y+1z+d=0$ $(P)$

Et on sait que le plan $(P)$ passe par $A(-1;0;2)$

Donc : $(-1)+2\times0+1\times2+d=0$ cad $d=-1$

Donc : $(P)$ $x+2y+z-1=0$

2) la droite $(D)$ passe par le point $B(3;1;0)$ et orthogonale au plan $(P)$ donc : $\vec{n}(1;2;1)$ est un vecteur directeur a la droite $(D)$

Donc une représentation paramétrique de la droite $(D)$ est :

$\begin{cases}x=1k+3\\ y=2k+1 \text{ avec } (k\in\mathbb{R})\\ z=1k+0\end{cases}$

3) $B'$ est la projection orthogonale de $B$ sur le plan $(P)$

donc : $B'\in(D)$ et $B'\in(P)$

Donc $B'$ est le point d'intersection de la droite $(D)$

Et le plan $(P)$

Donc les cordonnées de $B'$ sont solutions du système :

$\begin{cases}x+2y+z-1=0\\ x=1k+3\\ y=2k+1\\ z=1k+0\end{cases}$

On remplace : $x$ et $y$ et $z$ dans l'équation de $(P)$

On trouve : $k+3+2(2k+1)+k-1=0$

Donc : $6k+4=0$ Donc : $k=-\frac{2}{3}$

Donc: $x=-\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3}$ et $y=-\frac{4}{3}+1=-\frac{1}{3}$ et $z=-\frac{2}{3}+0=-\frac{2}{3}$

Par suite : $B'\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

## 8) positions relatifs de deux plans dans l'espace

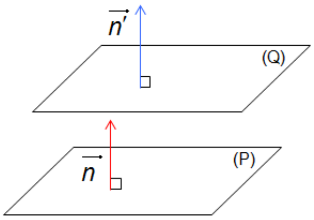
**Proposition :** Soient : $(P)$ : $ax+by+cz+d=0$

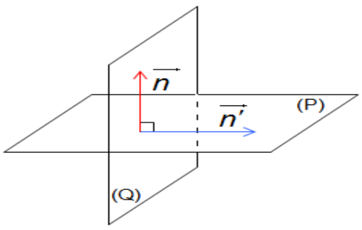
et $(P)'$ : $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans dans l'espace et $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n'}(a';b';c')$ deux vecteurs normaux respectivement a $(P)$ et $(P)'$

1)Les plans $(P)$ et $(P)'$ sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

2)Les plans $(P)$ et $(P)'$ sont sécants ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires

3)Les plans $(P)$ et $(P)'$ sont perpendiculaires ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux




**Exemple :** On considère les plans d'équations :

$(P)$ $2x-4y+z+1=0$ et $(P')$ $x+y+2z-3=0$

1)Monter que : $(P)\perp(P')$

2)Déterminer l'équation cartésienne du plan $(Q)$ parallèle au plan $(P)$ passant par le point $A(1;-1;1)$

**Solutions :** 1) $\vec{n}(2;-4;1)$ et $\vec{n'}(1;1;2)$ les deux vecteurs normaux respectivement de $(P)$ et $(P)'$

On a : $\vec{n}.\vec{n'}=2-4+2=0$

Donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$ par suite : $(P)\perp(P')$

2) $(P)\,||\,(Q)$ et $\vec{n}$ est normal a $(P)$ donc $\vec{n}(2;-4;1)$ est un vecteur normal a $(Q)$

Donc une équation cartésienne du plan $(Q)$ est :

$2x-4y+z+d=0$

Et puisque : $A(1;-1;1)\in(Q)$ donc :

$2+4+1+d=0 \Leftrightarrow d=-7$

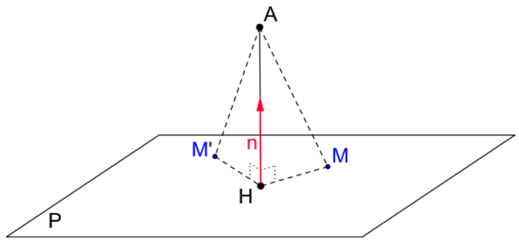
Donc : $(Q)$: $2x-4y+z-7=0$

## 9) distance d'un point à un plan

**Proposition :** Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ un point et $(P)$ : $ax+by+cz+d=0$ un plan dans l'espace avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan

la distance du point A au plan $(P)$ est la distance AH et on a : $d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

**Remarque :** pour tout point M du plan $(P)$ on a AH ≤AM




**RPEUVE :** $\vec{n}(a;b;c)$ est normal a $(P)$ pour tout point M du plan on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=\vec{n}.\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=\|\vec{n}\|\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

Or $M\in(P)$ donc $ax+by+cz+d=0$

Donc : $ax+by+cz=-d$

$\Leftrightarrow -ax_A-by_A-cz_A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

$\Leftrightarrow -ax_A-by_A-cz_A-d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times(\mp1)$

$\Rightarrow |-ax_A-by_A-cz_A-d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times AH\times|(\mp1)|$

$\Rightarrow AH=\frac{|ax_Aby_Acz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

**Exemple :** On considère le plan $(P)$ d'équations :

$x+2y+2z-6=0$ et le point $A(5;1;0)$

Calculer la distance du point A au plan $(P)$.

**Solution :** $d(A;(P))=\frac{|5+2\times1+2\times0-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|1|}{3}=\frac{1}{3}$

**Exercice5 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère le plan $(P)$ d'équation

$x+2y-z-1=0$

1)Les points A(1;1;2) et B(2;1;1) appartiennent-ils au plan $(P)$ ?

2)Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan $(P)$.

3)Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan $(P)$ ?

**Solution :** $1+2\times 1-2-1=0$ donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de.

On en déduit que A appartient au plan $(P)$

et donc que : $2+2\times 1-1-1=2\neq 0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de $(P)$ On en déduit que B n'est pas un point de $(P)$.

2) $AB=\sqrt{(2-1)^2+1(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$

Calculons $d(A;(P))$ et $d(B;(P))$.

On a : $A\in(P)$ donc : $d(A;(P))=0$

$$d(B;(P))=\frac{|2+2\times 1-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

on a : $\overrightarrow{AB}(1;0;-1)$

3)Un vecteur normal au plan $(P)$ est $\vec{n}(1;2;-1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal au plan. $(P)$

Le point A n'est donc pas le projeté orthogonal de B sur $(P)$.

## 10) Etude analytique de LA SPHERE

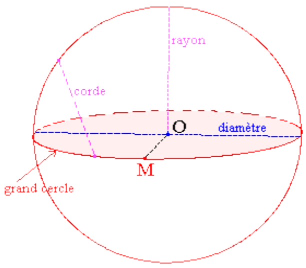
Dans tout ce qui va suivre, l'espace ($\mathscr{E}$) est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé.

### *10-1) Définition d'une sphère.*

**Définition :** Soit Ω un point dans l'espace ($\mathscr{E}$).

$R$ et un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ dans ($\mathscr{E}$), tels que $\Omega M = R$




On la note par : $S(\Omega, R)$.

$S(\Omega, R)=\{M\in\mathscr{E} \,/\, \Omega M = R\}$

### *10-2) Equation cartésienne d'une sphère.*

Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $r\geq 0$

$M(x, y, z)\in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

**Propriété1 :** Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $R\geq 0$, la sphère $S(\Omega, R)$ à une équation cartésienne de la forme :

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ (1)

**Exemple :** 1)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1, -1, 2)$ et de rayon $R=3$

2)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(0, -3, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

**Solution :** 1) l'équation cartésienne de la sphère est :

$(x-1)^2+(y-(-1))^2+(z-2)^2=3^2 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$

2) $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(1, -2, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

Donc : $\Omega A = R = \sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$

$R=\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$

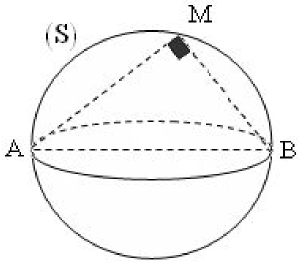
Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$(x-0)^2+(y-(-3))^2+(z-0)^2=\sqrt{21}^2 \Leftrightarrow$

$x^2+(y+3)^2+z^2=21 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6y-12=0$

**Propriété2 :** Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$




Et d'équation cartésienne :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

**Preuve :** $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})=0$

( $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$ Car I le milieu du segment $[AB]$

$M\in(S)\Leftrightarrow MA^2-IA^2=0\Leftrightarrow MA=IA$

Donc $(S)$ est la sphère de centre le milieu du segment $[AB]$ et de rayon : $IA$

$M(x;y;z)$ donc : $\overrightarrow{MA}(x_A-x;y_A-y;z_A-z)$

et $\overrightarrow{MB}(x_B-x;y_B-y;z_B-z)$

$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow$

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

C'est l'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$

**Exemple :** Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(S)$ de diamètre $[AB]$

Avec : $A(1;0;-1)$ et $B(1;2;-1)$

**Solution :** 1) *méthode1 :*

On a : $\Omega$ est le milieu du segment $[AB]$

Donc : $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ cad $\Omega(1;1;-1)$

Et on a : $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(0)^2+(2)^2+(0)^2}}{2}=1$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1^2$

Donc : $(S)$ $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$

*Méthode2 :* on utilise la Propriété

$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

On a : $\overrightarrow{MA}(1-x;0-y;-1-z)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow$

$(1-x)\times(1-x)+-y(2-y)+(-1-z)(-1-z)=0$

$\Leftrightarrow(1-x)^2+-y(2-y)+(-1-z)^2=0$

Donc : $(S)$ $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$

**Exercice6 :**Soit : $A(-1;2;1)$ et $B(1;-1;0)$ deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble $(S)$ des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

**Solution :** $(x+1)(x-1)+(y-2)(y+1)+(z-1)z=0$

$\Leftrightarrow x^2-1+y^2-y-2+z^2-z=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-z-3=0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$ Donc $(S)$ est la sphère de centre $\Omega\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{7/2}$

**Exercice7 :**Déterminer $(S)$ L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que

$$\begin{cases} x=1/2+2\sin\varphi\cos\theta \\ y=-1+2\sin\varphi\sin\theta \quad (\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=1+2\cos\varphi \end{cases}$$

**Solution :**soit $M(x;y;z)\in(S)$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=$

$=(2\sin\varphi\cos\theta)^2+(2\sin\varphi\sin\theta)^2+(2\cos\varphi)^2$

$=4\sin\varphi^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)+4\cos\varphi^2$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=2^2$

$(S)$ L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère de centre $\Omega$(1 /2, -1,1) et de rayon $R=2$

***10-3 L'ensemble $(S)$ des points $M(x;y;z)$ tels que :***

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

**Proposition :**Soit $(S)$ L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec $a$ ; $b$ ; $c$ et $d$ des réelles

- Si : $a^2+b^2+c^2-d\succ 0$ alors $(S)$ est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d=0$ alors $S=\{\Omega(a;b;c)\}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d\prec 0$ alors $S=\varnothing$

**Preuve :** $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+z^2-2cz+c^2+d-a^2-b^2-c^2=0$

$\Leftrightarrow(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d=0$

- Si : $a^2+b^2+c^2-d\succ 0$ alors $(S)$ est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d=0$ alors $S=\{\Omega(a;b;c)\}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d\prec 0$ alors $S=\varnothing$

**Exemple :** Déterminer $(S)$ L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans les cas suivants :

1) $(S_1)$ : $x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z=0$

2) $(S_2)$ : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

3) $(S_3)$ : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

**Solution :** 1)soit $a=1$ et $b=3$ et $c=2$ et $d=0$

$a^2+b^2+c^2-d=1+9+4=14$

Puisque $a^2+b^2+c^2-d=14\succ 0$

Donc : L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère $(S_1)$ de centre $\Omega$(1, 3,2) et de rayon $R=\sqrt{14}$

2) $(S_2)$ : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

$M(x;y;z)\in(S_2)$

$\Leftrightarrow(x^2-6x)+(y^2+4y)+(z^2+6z)+22=0\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ et $y+2=0$ et $z+3=0$

$\Leftrightarrow x=3$ et $y=-2$ et $z=-3$

alors $S_2=\{\Omega(3;-2;-3)\}$

3) $(S_3)$ : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

$M(x;y;z)\in(S_3)$

$\Leftrightarrow(x^2-2x)+(y^2+3y)+(z^2+z)+7=0\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{7}{2}$ alors $S_3=\varnothing$

***10-4) L'intersection d'une sphère $(S)$ et une droite $(D)$ :***

**Exemple1 :** Soient $(S)$ une sphère :

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

et $(D)$ une droite : $\begin{cases}x=1-t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution** :

$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=1-t\\ y=1+t\\ z=1+t\\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9\end{cases}$

Donc : $t^2+t^2+(t-1)^2=9\Leftrightarrow 2t^2-2t-8=0$

$\Leftrightarrow t=2$ ou $t=\frac{-4}{3}$

$x=7/3; y=-1/3; z=-1/3$ ou $x=-1; y=3; z=3$

la droite $(D)$ coupe la sphère $(S)$ en deux points

$A\left(\frac{7}{3};\frac{-1}{3};\frac{-1}{3}\right)$ et $B(-1;3;3)$

**Exemple2 :** Soient $(S)$ une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0$

et $(D)$ une droite : $\begin{cases}x=2+3t\\ y=4+t\\ z=-2+5t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=2+3t\\ y=4+t\\ z=-2+5t\\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0\end{cases}$

Donc :

$(2+3t)^2+(4+t)^2+(-2+5t)^2-2(2+3t)-4(4+t)+2(-2+5t)t-8=0$

$\Leftrightarrow 25t^2=0$ $\Leftrightarrow t=0$ Donc : $x=-2; y=4; z=-2$

la droite $(D)$ coupe la sphère $(S)$ en un seul point $A(2;4;-2)$ on dit que la droite $(D)$ est tangente à $(S)$ en $A(2;4;-2)$

**Exemple3 :** Soient $(S)$ une sphère :

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0$

et $(D)$ une droite : $\begin{cases}x=-1+t\\ y=1+2t\\ z=2\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=-1+t\\ y=1+2t\\ z=2\\ x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0\end{cases}$

Donc : $(-1+t)^2+(1+2t)^2+2^2+2(-1+t)-2(1+2t)-1=0$

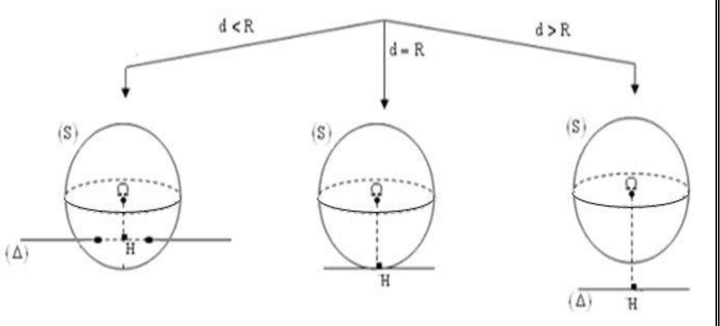
$\Leftrightarrow 5t^2+1=0$ Pas de solutions

Donc la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

**Proposition :** Soient $(D)$ une droite de l'espace et $(S)$ une sphère de centre O et de rayon $R$ , H le projeté orthogonal du point O sur la droite $(D)$.

Notons d = OH :

- Si d > $R$ alors la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si d = $R$ alors la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite $(D)$ est tangente en H à $(S)$
- Si d < $R$ alors la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que
la droite $(D)$ est sécante à $(S)$. ( OA = OB = $R$ )



**Exercice8 :** Étudier la position relative de la sphère $(S)$ et la droite $(D)$ dans les cas suivants :

1) $(S)$ : $x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0$

La droite $(D)$ qui passe par $A(0;5;1)$ **et** $\vec{n}(2;1;-2)$ **un vecteur directeur de** $(D)$

2) $(S)$ $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$

La droite $(D)$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+t \end{cases}$$

3) $(S)$ $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0$

La droite $(D)$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

**Solution :** 1) $(S)$ : $x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0$

La droite $(D)$ passe par $A(0;5;1)$ **et** $\vec{n}(2;1;-2)$ un vecteur directeur de $(D)$ donc une représentation paramétrique de $(D)$ est : $\begin{cases} x=2t \\ y=5+t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$

$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\,/$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0 \\ x=2t \\ y=5+t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$$

Donc :

$(2t)^2+(5+t)^2+(1-2t)^2+6\times 2t-4(5+t)-2(1-2t)+5=0$

$\Leftrightarrow 9t^2+18t+9=0 \Leftrightarrow t^2+2t+1=0$

On a : $\Delta=0$ donc une solution double : $t=\dfrac{-b}{2a}=-1$

On remplace et on trouve : $\begin{cases} x=-2 \\ y=4; \\ z=3 \end{cases}$

la droite $(D)$ coupe la sphère $(S)$ en un seul point $T(-2;4;3)$ on dit que la droite $(D)$ est tangente à $(S)$ en $T(-2;4;3)$

2) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0 \\ x=-1+2t \\ y=2-2t \\ z=-1+t \end{cases}$$

On remplace et on trouve :

$(-1+2t)^2+(2-2t)^2+(-1+t)^2-4\times(-1+2t)-2(2-2t)-1=0$

$\Leftrightarrow 9t^2-18t+5=0$ on $\Delta=18^2-4\times9\times5=324-180=144=12^2$

Donc : $t_1=\dfrac{1}{3}$ et $t_2=\dfrac{5}{3}$

On remplace et on trouve :

$A\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ et $B\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

la droite $(D)$ coupe la sphère $(S)$ en deux points: A et B

3) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0 \\ x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

On remplace et on trouve :

$0^2+t^2+t^2-2\times0+4t-2t+4=0$

$\Leftrightarrow 2t^2+2t+4=0 \Leftrightarrow t^2+t+2=0$ on a : $\Delta=1^2-4\times2=-7<0$

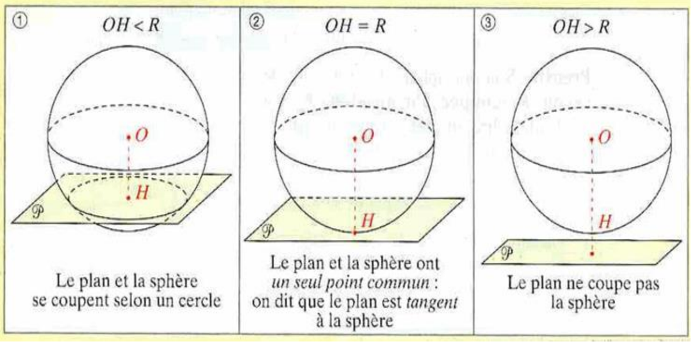
Donc l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Donc la droite $(D)$ et la sphère $(S)$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide. $(S)\cap(D)=\varnothing$

***10-5) L'intersection d'une sphère $(S)$ et un plan $(P)$***

**Proposition :** Soient $(S)$ une sphère de centre $O$ et de rayon $R$ , $(P)$ un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de $O$ sur le plan $(P)$
et d = $O$H, la distance du point $O$ au plan $(P)$.

- Si d > $R$ alors le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si d = $R$ alors le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan $(P)$ est tangent en H à $(S)$
- Si d < $R$ alors l'ensemble des points commun au plan $(P)$ et la sphère $(S)$ est le cercle du plan $(P)$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (Théorème de Pythagore ), dans ce cas on dit le plan $(P)$ est sécant à $(S)$.




**Exemple1 :** Soient $(S)$ une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$

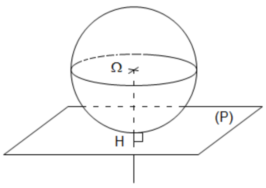
Et le plan d'équation $(P): 2x-y-z+5=0$

Étudier la position relative de la sphère $(S)$ et le plan $(P)$

**Solution :** Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$ donc

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\sqrt{6}^2$

$(S)$ est donc une sphère de centre $\Omega(1;1;0)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$



Et puisque : $d(\Omega;(P))=R=\sqrt{6}$

Alors le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ ont un unique point en commun donc le plan $(P)$ est tangent en H à $(S)$

Déterminons le point de tangence H qui est la projection de $\Omega$ sur le plan $(P)$

Soit $\vec{n}(2;-1;-1)$ Un vecteur normal à ce plan $(P)$

$$\exists k\in\mathbb{R} / \begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=k\vec{n}\\ H\in(P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2k\\ y=1-k\\ z=-k\\ 2x-y-z+5=0\end{cases}$$

Donc : $2(1+2k)-(1-k)-(-k)+5=0 \Leftrightarrow k=-1$ Donc :

$x=-1; y=2; z=1$ Donc $H(-1;2;1)$

**Exemple2 :** Soient $(S)$ une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

Et le plan d'équation $(P): x-y+z-3=0$

Étudier la position relative de la sphère $(S)$ et le plan $(P)$

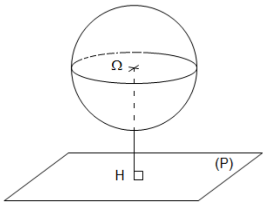
**Solution :** Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a : $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ donc

$(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1^2$

$(S)$ est donc une sphère de centre $\Omega(1;0;-1)$ et de rayon $R=1$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|1-0-1-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}\succ R$

Alors le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.



$(S)\cap(P)=\varnothing$

**Exemple3 :** Soient $(S)$ une sphère :

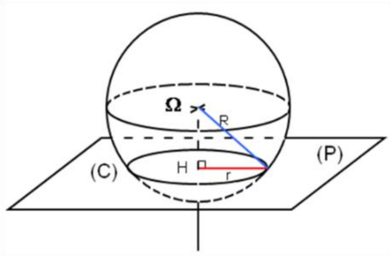
$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$

Et le plan d'équation $(P): 2x-y+3z-2=0$

Étudier la position relative de la sphère $(S)$ et le plan $(P)$

**Solution :** $(S)$ est donc une sphère de centre $\Omega(2;1;-3)$ et de rayon $R=3$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}\prec R$



Alors la sphère $(S)$ coupe le plan $(P)$ suivant un cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point $\Omega$ sur le plan $(P)$ et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{62}{14}}$

Déterminons le centre $H(x;y;z)$ du cercle

Soit $\vec{n}(2;-1;3)$ Un vecteur normal à ce plan $(P)$

$$\exists k\in\mathbb{R} / \begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=k\vec{n}\\ H\in(P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+2k\\ y=1-k\\ z=-3+3k\\ 2x-y+3z-2=0\end{cases}$$

Donc : $2(2+2k)-(1-k)+3(-3+3k)-2=0$

$\Leftrightarrow k=\frac{4}{7}$ Donc : $x=\frac{22}{7};y=\frac{3}{7};z=-\frac{9}{7}$

Donc $H\left(22/7;3/7;-9/7\right)$

**Exercice9 :** $(S)$ sphère de centre $\Omega(2;0;1)$

et de rayon : $R=3$

le plan d'équation $x-2y+z+3=0$

a)déterminer une équation cartésienne de $(S)$

b)calculer : $d(\Omega;(P))$ et verifier que le plan $(P)$ coupe $(S)$ suivant un cercle $(C)$ dont on déterminera le rayon $r$

c)déterminer une équation paramétrique de la droite $(\Delta)$ qui passe par $\Omega$ et orthogonal au plan $(P)$

d)en déduire $H$ le centre du cercle $(C)$

**Solution :**

**a)** $(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$

On effectue les calculs on trouve :

$$x^2-4x+4+y^2+z^2-2z+1=9$$

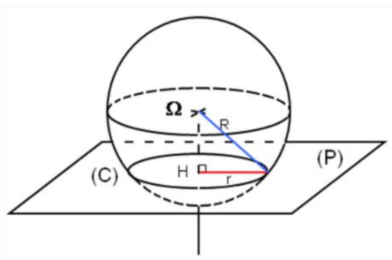
b) $x-2y+z+3=0$ et $\Omega(2;0;1)$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}<R=3$$

Donc le plan $(P)$ coupe $(S)$ suivant un cercle $(C)$

On remarque que le triangle est rectangle en $H$

Et Pythagore donne : $r=\sqrt{R^2-d^2}$ donc :




$$r=\sqrt{3^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$$

c) $(\Delta)$ passe par $\Omega(2;0;1)$ et orthogonal au plan $(P)$

**et on a** $\vec{n}(1;-2;1)$ vecteur normal au plan $(P)$ donc : vecteur directeur de $(\Delta)$

donc : $\begin{cases} x=1t+2 \\ y=-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1t+1 \end{cases}$

4) $(P)$ $x-2y+z+3=0$ et $(\Delta)$ $\begin{cases} x=1t+2 \\ y=-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1t+1 \end{cases}$

$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$ Donc :

$(t+2)-2(-2t)+(t+1)+3=0\Leftrightarrow 6t+6=0\Leftrightarrow t=-1$

On remplace et on trouve : $\begin{cases} x=-1+2 \\ y=-2(-1) \\ z=-1+1 \end{cases}$

donc : $H(1;2;0)$ est le centre du cercle $(C)$

***10-6) le plan tangent a une sphère en un point :***

**Proposition :**

Soient $(S)$ une sphère de centre $\Omega$ et $A\in(S)$

Il existe un plan $(P)$ unique de l'espace tangent à la sphère en $A$ et définie par : $M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

**Exemple :** Soie $(S)$ une sphère : $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=3$

Et soit le point $A(1;-1;-1)$

Vérifier que $A\in(S)$ et Déterminer l'équations cartésienne du plan $(P)$ tangent a la sphère $(S)$ en $A$

**Solution :** $1^2+(-1)^2+(-1+2)^2=1+1+1=3$ donc $A\in(S)$

$\Omega(0;0;-2)$ est le centre de la sphère $(S)$ et de rayon $R=3$ Et on a : $\overrightarrow{A\Omega}(-1;1;-1)$

Donc : $M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\Leftrightarrow -(x-1)+(y+1)-(z+1)=0$

Donc l'équation de : $(P): x-y+z-1=0$

**Exercice10:** on considère les plans d'équations respectives $(P)$ $x-y+z=0$ et $(Q)$ $2x+3y+z-6=0$

et la sphère $(S)$ de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan $(P)$

et soit la droite $(\Delta)$ qui passant par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(Q)$

1) monter que les plans $(P)$ et $(Q)$ sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère $(S)$

b)déterminer le point de tangence de $(P)$ et $(S)$

3)a) déterminer le point d'intersection de $(\Delta)$ et $(Q)$

b) Montrer que le plan $(Q)$ coupe la sphère $(S)$ suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Solutions** :1)On a : $\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur normal à $(P)$

et $\vec{n}'(2;3;1)$ Un vecteur normal à $(P)$

Et on a : $\vec{n}.\vec{n}' = 1\times 2+(-1)\times 3+1\times 1=0$

Donc $\vec{n}\perp\vec{n}'$ donc $(P)$ et $(Q)$ sont orthogonaux

2)a)puisque la sphère $(S)$ est tangente

au plan $(P)$ Alors : $d(\Omega;(P))=R$

Et on a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}$

Donc : $R=\sqrt{3}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère $(S)$ est :

$$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=3$$

2)b) le point de tangence H de $(P)$ et $(S)$ est

la projection orthogonal $\Omega$ sur le plan $(P)$

donc H est le point d'intersection entre la droite $(D)$

perpendiculaires a $(P)$ passant par $\Omega$ et on a : $\vec{n}(1;-1;1)$

Un vecteur normal à $(P)$ donc c'est un vecteur directeur de la droite $(D)$

la représentation paramétrique de $(D)$ est

$$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4+t \end{cases}$$

$H\in(D)\cap(P)$ Donc : $(1+t)-(2-t)+4+t=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ donc : $H(0;3;3)$

3)a) puisque $(\Delta)\perp(Q)$ alors :

$\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur directeur de $(\Delta)$:

Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de

$$(\Delta):\text{est}(\Delta):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4+t \end{cases}$$

$W(x;y;z)\in(\Delta)\cap(Q)$

donc : $2(1+2t)+3(2+3t)+4+t-6=0$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{7}$ donc : $W\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{18}{7}\right)$

3°b) Montrons que le plan $(Q)$ coupe la sphère $(S)$ suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

on a : $d(\Omega;(Q))=\dfrac{|2+6+4-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}\prec\sqrt{3}$

le plan $(Q)$ coupe la sphère $(S)$ suivant une cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point $\Omega$ sur le plan $(Q)$

et puisque $(\Delta)$ passe par $\Omega$ est perpendiculaires a $(Q)$ en $W$ alors $W\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{18}{7}\right)$ est le centre du cercle $(C)$ et le rayon du cercle $(C)$ est $r=\sqrt{R^2-d^2}$ avec $d=d(\Omega;(Q))$

Donc : $r=\sqrt{3/13}$

**Exercice11:** on considère l'ensemble $(S_m)$ des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient l'équations :

$$(S_m)\ :\ mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0$$

Avec $m$ un paramètre non nul

1) monter que $(S_m)$ est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

2) monter que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Solution :** 1) $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(\frac{m-1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(1-\frac{1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2-\left(1-\frac{1}{m}\right)^2-\frac{2}{m^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2=\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}$$

Et puisque : $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^2+\dfrac{2}{m^2}\succ 0$

Alors : $(S_m)$ est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

de centre $\Omega_m\left(1-\frac{1}{m};-\frac{1}{m};-\frac{1}{m}\right)$ et de rayon

$R_m=\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}}$

2)soit $M(x;y;z)\in(S_m)\quad \forall m\in\mathbb{R}^*$

Donc : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0 \Leftrightarrow$

$m(x^2+y^2+z^2-2x)+(2x+2y+2z)=0 : \forall m\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x=0\\2x+2y+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=1\\2x+2y+2z=0\end{cases}$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre :

la sphère $(S)$ : $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ et le plan $(P)$ :

$2x+2y+2z=0$

en effet le cercle existe car :

$d(\Omega;(Q))=\frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\prec 1$

le centre H du cercle est l'intersection entre $(P)$ et la droite $(\Delta)$ qui passe par $\Omega$ est perpendiculaires a $(P)$ et puisque $(\Delta)\perp(P)$ alors : $\vec{n}(1;1;1)$ Un vecteur directeur de $(\Delta)$

Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de

$(\Delta)$ est $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$ donc : $(1+t)+t+t=0$

$\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$ donc : $H\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

et le rayon du cercle $(C)$ est :

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc : tous les sphères se coupent suivant le cercle $(C)$

**Exercice12:** dans l'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé On considère les plan $(P_m)$ d'équations $x+y-z-m=0$ avec $m$ paramètre réel Et la sphère $(S)$ de centre $\Omega(1;2;1)$ et le rayon $R=\sqrt{3}$

1)Etudier et discuter suivant le paramètre $m$ la position relative de la sphère $(S)$ et les plan $(P_m)$

2)soit $(E)$ l'ensemble des réels $m$ tels que : $(P_m)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle $(C_m)$

Déterminer l'ensemble des centres des cercles $(C_m)$ lorsque $m$ varie dans $(E)$

**Solution** : 1) $(P_m)$ : $x+y-z-m=0$

$d_m=d(\Omega;(P_m))=\frac{|1+2-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow|2-m|\prec 3\Leftrightarrow -3\prec 2-m\prec 3\Leftrightarrow -5\prec -m\prec 1$

$\Leftrightarrow -1\prec m\prec 5$

le plan $(P_m)$ coupe la sphère $(S)$ suivant des cercles de centre $C_m$ qui est la projection orthogonal du point $\Omega$ sur le plan $(P_m)$

soit $(\Delta)$ la doite qui passe par $\Omega$ est perpendiculaires a $(P_m)$ et puisque $(\Delta)\perp(P_m)$ alors : $\vec{n}(1;1;-1)$ Un vecteur directeur de $(\Delta)$ Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la

représentation paramétrique de $(\Delta)$ est $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1-t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

le centre $C_m$ est le point d'intersection de $(\Delta)$ et $(P_m)$

on va donc résoudre le system $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1-t\\x+y-z-m=0\end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-m=0\Leftrightarrow 3t+2-m=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{m-2}{3}$ donc les coordonnées du centre du cercle

d'intersection est $\begin{cases}x=1+\frac{m-2}{3}=\frac{m+1}{3}\\y=2+\frac{m-2}{3}=\frac{m+4}{3}\\z=1-\frac{m-2}{3}=\frac{-m+5}{3}\end{cases}$

$C_m\left(\frac{m+1}{3};\frac{m+4}{3};\frac{-m+5}{3}\right)$ et le rayon est :

et le rayon du cercle $(C)$ est :

$r=\sqrt{R^2-{d_m}^2}$ avec $d_m=\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$ et $R=\sqrt{3}$

$r_m=\sqrt{3-\left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2}\Leftrightarrow r_m=\sqrt{3-\left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$\Leftrightarrow r_m=\sqrt{\frac{9-(2-m)^2}{3}}=\sqrt{\frac{9-(m^2-4m+4)}{3}}=\sqrt{\frac{-m^2+4m+5}{3}}$

**2cas :**Si $d\left(\Omega;\left(P_m\right)\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m|=3 \Leftrightarrow 2-m=3$ ou $2-m=-3$

$\Leftrightarrow m=-1$ ou $m=5$

la sphère $(S)$ de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan $\left(P_m\right)$

**si** $m=-1$ : le point de tangence $T_1$ est est le point d'intersection de $(\Delta)$ et $\left(P_{-1}\right)$

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)+1=0 \Leftrightarrow 3t+2+1=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ donc les coordonnées du point de tangence est donc $T_1(0;1;2)$

**si** $m=5$ : le point de tangence $T_2$ est est le point d'intersection de $(\Delta)$ et $\left(P_5\right)$

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-5=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-5=0 \Leftrightarrow 3t+2-5=0$

$\Leftrightarrow t=1$ donc les coordonnées du point de tangence est donc $T_2(2;3;0)$

**3cas :**Si $d\left(\Omega;\left(P_m\right)\right)\succ\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\succ\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m|\succ 3 \Leftrightarrow 2-m\succ 3$ ou $2-m\prec -3$

$\Leftrightarrow m\prec -1$ ou $m\succ 5$

$\left(P_m\right)\cap(S)=\varnothing$

2) les coordonnées des centres des cercles d'intersections sont $\begin{cases} x=\frac{m+1}{3} \\ y=\frac{m+4}{3} \\ z=\frac{-m+5}{3} \end{cases}$ et $-1\prec m\prec 5$

c'est une portion de droite

**Exercice13:** dans l'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé on considère l'ensemble $\left(S_m\right)$ des points $M(x;y;z)$ tq : $\left(S_m\right)$ :

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

avec $m$ paramètre réel

1)Montrer que $\left(S_m\right)$ est une sphère $\forall m\in\mathbb{R}$

2)Déterminer l'ensemble des centres des $\left(S_m\right)$ lorsque $m$ varie dans $\mathbb{R}$

3)Montrer qu'il existe un cercle $(C)$ incluse dans tous les sphères $\left(S_m\right)$ $\forall m\in\mathbb{R}$ et Déterminer le plan $(P)$ qui contient ce cercle $(C)$

4)Soit un point $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ dans l'espace tq $M_0\notin(P)$ Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par $M_0$

5)Montrer qu'il existe deux sphères $\left(S_m\right)$ tangentes au plan $(O;x;y)$

**Solution :** 1) $x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\frac{m}{2}x+\left(\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2+2(m-1)y+(m-1)^2-(m-1)^2$

$+2\left(\frac{m+4}{2}\right)z+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+(m-1)^2-1$

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{4(m-1)^2+(m+4)^2+m^2-4}{4}$

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{6m^2+16}{4}=R^2$

Et puisque : $\frac{6m^2+16}{4}\succ 0$

Alors : $\left(S_m\right)$ est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}$ de centre $\Omega_m\left(-\frac{m}{2};1-m;-\frac{m+4}{2}\right)$ et de rayon

$R_m=\sqrt{\frac{6m^2+16}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$

2)Déterminons l'ensemble des centres des $\left(S_m\right)$ lorsque $m$ varie dans $\mathbb{R}$

les coordonnées des centres des cercles d'intersections sont $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}m \\ y=-m+1 \\ z=-\frac{1}{2}m-2 \end{cases}$ $(m\in\mathbb{R})$

c'est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$ et qui passe par $A(0;1;-2)$

3)Montrons qu'il existe un cercle $(C)$ incluse dans tous les sphères $(S_m)$ $\forall m\in\mathbb{R}$ :

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+mx+2my-2y+mz+4z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y+4z+1+m(x+2y+z)=0 \quad \forall m\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(S): x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0\\(P): x+2y+z=0\end{cases}$$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre :

la sphère $(S)$: $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2^2$ et le plan $(P)$ : $x+2y+z=0$

en effet le cercle existe car : $\Omega(0;1;-2)$

$d(\Omega;(P))=\frac{|0+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0\prec 2$ donc $\Omega\in(P)$

donc le centre du cercle $(C)$ est : $\Omega(0;1;-2)$

et le rayon est : $R=2$

et tous les sphères se coupent suivant le cercle $(C)$

et le plan $(P)$ qui contient ce cercle $(C)$ est :

$(P)$ : $x+2y+z=0$

4) soit $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0\notin(P)$ :

$x+2y+z=0$ donc $x_0+2y_0+z_0\neq 0$

Montrons qu'il existe une sphère unique qui passe par $M_0$ :c d a l'existence d'un unique m ?

$M_0\in(S)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$M_0\in(S)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1+m(x_0+2y_0+z_0)=0$

$\Leftrightarrow m(x_0+2y_0+z_0)=-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)$

$$\Leftrightarrow m=\frac{-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)}{x_0+2y_0+z_0}$$

6)Montrons qu'il existe deux sphères $(S_m)$ tangentes au plan $(O;x;y)$ :

L'équation du plan : $(O;x;y)$ est : $z=0$ donc

$$d(\Omega_m;(O;x;y))=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}\Leftrightarrow\frac{\left|-\frac{m+4}{2}\right|}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$$

$\Leftrightarrow |m+4|=\sqrt{6m^2+16}\Leftrightarrow(m+4)^2=6m^2+16$

$\Leftrightarrow m^2+8m+16=6m^2+16$

$\Leftrightarrow 5m^2-8m=0 \quad \Leftrightarrow m(5m-8)=0$

$\Leftrightarrow m=0$ ou $m=\frac{8}{5}$ donc il existe deux sphères $(S_m)$ tangentes au plan $(O;x;y)$ :

$(S_0)$: $x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0$

$\left(S_{\frac{8}{5}}\right)$: $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+2\left(\frac{8}{5}-1\right)y+\left(\frac{8}{5}+4\right)z+1=0$

Cad : $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y+\frac{28}{5}z+1=0$

http:// abcmaths.e-monsite.com

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien