



DEFINITION	<p>\vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nul de l'espace (\mathcal{E}) ; A et B et C trois points de (\mathcal{E}) tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; H est la projection de C sur la droite (AB) .</p> <p>Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$</p>	
	<p>2^{ème} cas le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$</p> <p style="text-align: center;">deuxième cas</p>	<p>1^{ER} cas le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$</p> <p style="text-align: center;">premier cas</p>
Remarque	<ul style="list-style-type: none"> • $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ est le carré scalaire de \vec{u} est toujours positif . • $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$ est la norme du vecteur \overrightarrow{AB} on note : $\ \vec{u}\ = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$. • $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. • $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ 	
Propriétés	<p>\vec{u} et \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) ; $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :</p> <p>Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$</p>	
Base et repère orthonormé	<ul style="list-style-type: none"> • $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace (\mathcal{E}) équivaut à \vec{i} et \vec{j} et \vec{k} ne sont pas coplanaires $(\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0)$ • Prenons un point O de l'espace (\mathcal{E}) le quadruplé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé repère de (\mathcal{E}) • Si $\vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ et $\ \vec{j}\ = \ \vec{i}\ = \ \vec{k}\ = 1$ alors : <ul style="list-style-type: none"> ❖ la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace . ❖ le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace . 	
<p>Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace (\mathcal{E}) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.</p> <p>On prend $\vec{u}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v}(x', y', z') = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ et $M(x, y, z)$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$</p>		
Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$	<ul style="list-style-type: none"> • Le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$. • La norme du vecteur \vec{u} est : $\ \vec{u}\ = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. • La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. 	



Conséquence	Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$ avec $\vec{u}(a,b,c)$; $(\vec{u} \neq \vec{0})$ c.à.d. $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un plan a pour équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$	
Le plan $P(A, \vec{n})$	<ul style="list-style-type: none"> • Tout vecteur \vec{n} non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P) . • \vec{n} est normale au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$. • Si \vec{n} est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P(A, \vec{n})$ • L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace (E) qui vérifie $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est le plan tel que un vecteur normal est $\vec{n}(a,b,c)$. • Ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace (E) qui vérifie $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{n} \neq \vec{0}$ est le plan qui passe par A et le vecteur \vec{n} est un vecteur normal à ce plan. • Donc tout plan $P(A, \vec{n}(a,b,c))$ a pour équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ la réciproque est vraie avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. 	
Distance d'un point à un plan	$AH = d(A, (P)) = \frac{ ax_A + by_A + cz_A + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $(P) : ax + by + cz + d = 0$	
Parallélisme et orthogonalité de deux plans	$(P_1) : ax + by + cz + d = 0$ et $(P_2) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$	
	$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{ sont colinéaires})$ $(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ (non nuls)}$ $(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 (\vec{n} \text{ et } \vec{n}')$	
		$(P_2) \perp (P_1) \Leftrightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$
Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan	$P(B, \vec{n})$ et $D(A, \vec{u})$ et $(P) : ax + by + cz + d = 0$	
	$(D) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ $(D) \perp (P) \Leftrightarrow (\vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires})$	
Etude analytique d'une sphère		
Définition	Ω est un point donné de l'espace (E) et $R > 0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace (E) tel que $\Omega M = R$ s'appelle le sphère de centre Ω et de rayon R on note (S) ou $S(\Omega, R)$. Equation cartésienne de $(S) = S(\Omega(a,b,c), r)$ est : $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = R^2$ ou bien : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$	

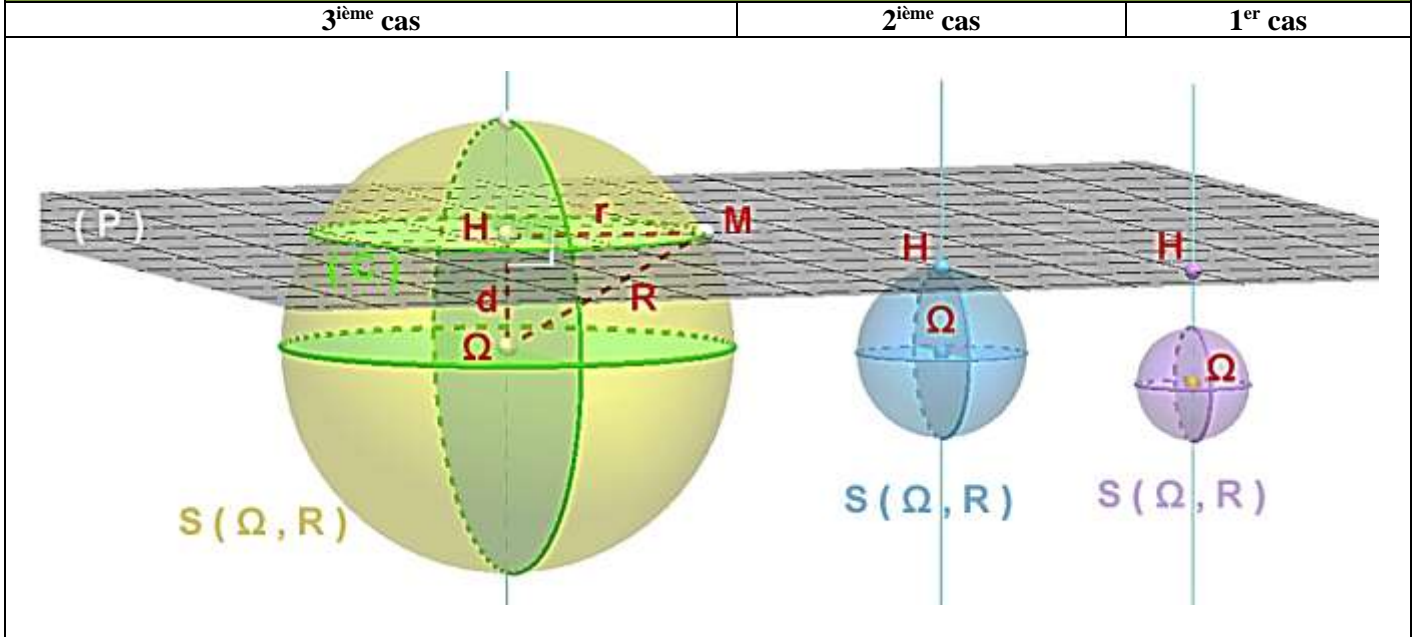


Ω est le milieu de $[AB]$; $[AB]$ est un diamètre du sphère (S) donc A et B appartiennent à (S)
 On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note (S) ou $S_{[AB]}$.
 Equation cartésienne de $S_{[AB]}$ est :
 $M(x,y,z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ou bien
 $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$

L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace (\mathcal{E}) tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ avec a et b et c et d de \mathbb{R} on pose $A = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$ est :

- $(E) = \emptyset$ si $A < 0$.
- $(E) = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$ si $A = 0$.
- Le Sphère $(E) = S \left(\Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right), R = \frac{\sqrt{A}}{2} \right)$ si $A > 0$.

Intersection d'un plan (P) et une sphère (S)



<p>3^{ème} CAS : $d = \Omega H < R$ on a $(P) \cap (S) = (C)$ (P) coupe (S) suivant le cercle de centre H et de rayon $R_C = \sqrt{R_S^2 - d^2}$ $R_C = r$ et $R_S = R$</p>	<p>2^{ème} CAS : $d = \Omega H = R$ on a $(P) \cap (S) = \{H\}$ (P) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega) \perp (P)$</p>	<p>1^{ER} CAS : $d = \Omega H > R$ on a $(P) \cap (S) = \emptyset$ (P) et (S) son disjoint</p>
---	--	--

Remarques :

- H est la projection de Ω sur (P) et $d = \Omega H = d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- on détermine H par l'intersection du plan (P) et la droite (D) perpendiculaire au plan passant par Ω



• Vecteur normal \vec{n} au plan (P) est un vecteur directeur de la droite (D)

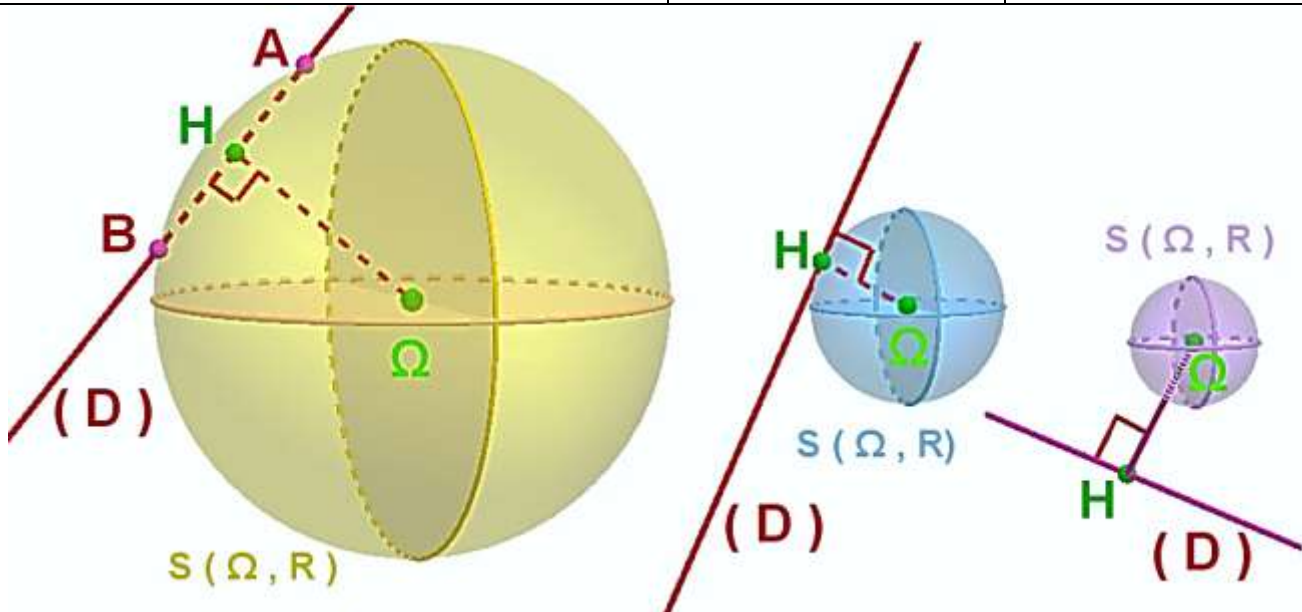
Théorème : par un point A quelconque d'une sphère (S) il existe un et un seul plan (Q) tangente au sphère (S) au point A . l'équation de (Q) est : $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

Intersection d'une droite (D) et une sphère (S)

3^{ème} CAS :

2^{ème} CAS

1^{ER} CAS :



3^{ème} CAS : $(D) \cap (S) = \{A, B\}$

2^{ème} CAS / $(D) \cap (S) = \{H\}$

1^{ER} CAS : $(D) \cap (S) = \emptyset$

(D) coupe (S) en deux points A et B
(Deux points mais pas le segment [AB])

(D) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega) \perp (D)$

(D) et (S) sont disjoints

CONDITION : $d = \Omega H < R$

CONDITION : $d = \Omega H = R$

CONDITION : $d = \Omega H > R$

REMARQUE :

Remarques :

• H est la projection de Ω sur (D) .

• Si $(D) = D(K, \vec{u})$ on a $d = \Omega H = \frac{\|\overrightarrow{K\Omega} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ (voir chapitre produit vectoriel) .