I. Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés :

01. Trièdre :

a. Définition :

$[OI)$ et $[OJ)$ et $[OK)$ trois demi-droites non coplanaires de l'espace $(\mathcal{E})$ constituent dans cet ordre un trièdre on note (OI, OJ, OK) chaque demi-droite est appelée cote de trièdre .

b. Exemple :

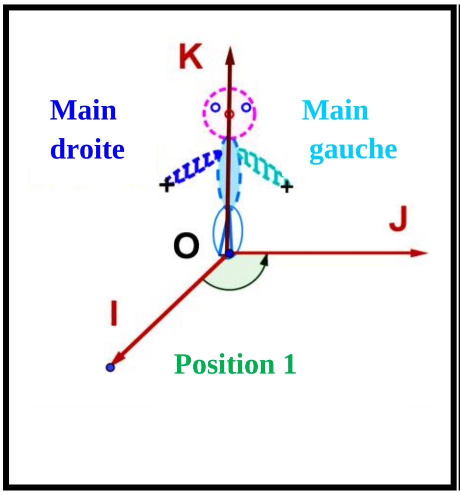
02. Bonhomme d'Ampère :

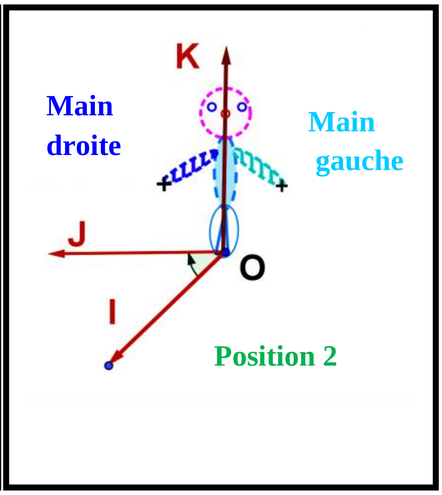
a. Approche :

(OI, OJ, OK) est trièdre , on considère une personne virtuel (ou imaginaire) tel que :

- ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK)$.
- il regarde le cote $[OI)$.
- on s'intéresse de la main gauche suit le cote $[OJ)$ si oui ou non .

cet personne est appelé Bonhomme d'Ampère
donc on a deux positions pour cet personne (voir les positions) .





Gravure de 1825 par Ambroise Tardieu.

Données clés

Naissance	20 janvier 1775 Lyon (France)
Décès	10 juin 1836 (à 61 ans) Marseille (France)
Nationalité	Française
Champs	Mathématiques, physique
Institutions	École polytechnique Collège de France
Renommé pour	Théorème d'Ampère

Signature

03. Base et repère orientés :

a. Vocabulaire :

- La position du bonhomme d'ampère tel que :
  ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK)$ et il regarde le cote $[OI)$ et la main gauche suit le cote $[OJ)$; le trièdre (OI, OJ, OK) est appelé trièdre directe ou positif (cette position nous intéresse dans notre leçon) l'autre position le trièdre est appelé trièdre rétrograde ou négative .
- On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ d'où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires .
- triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base directe si le trièdre (OI, OJ, OK) est direct.
- Le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct dans ce cas on dit l'espace est orienté une orientation directe ou positive .

II. Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté :

01. Définition géométrique du produit vectoriel :

a. Définition :

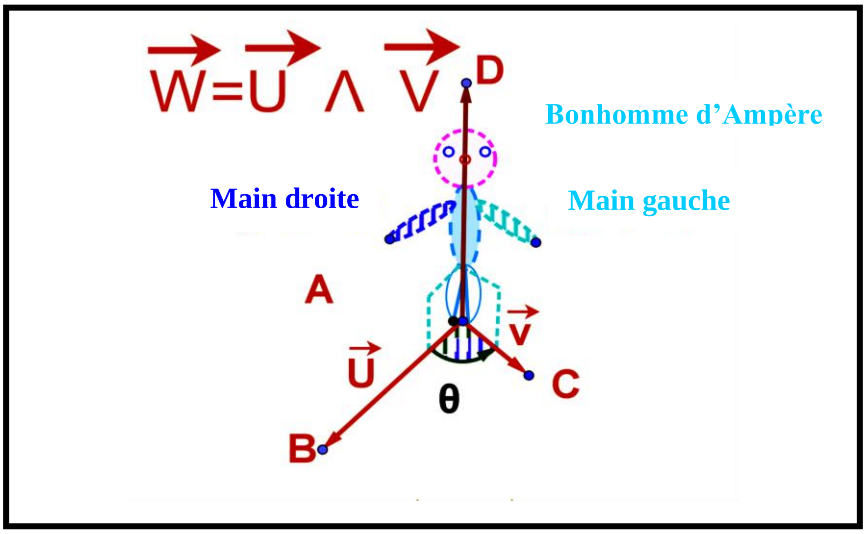
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ orienté .

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, on note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui vérifie :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se sont pas colinéaires alors :
   - $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c.à.d. $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$)
   - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe ou encore $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base directe ou encore (AB, AC, AD) est un trièdre direct .
   - La norme de $\vec{w}$ est $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\theta$, θ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

b. Exemple :

Exemple 1 :



Exemple 2 :

On pose : $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\overline{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$ calculer $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

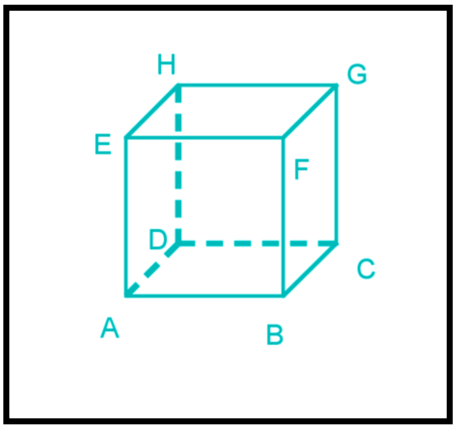
On a :

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\theta \\ &= 2 \times 5 \times \sin\frac{\pi}{6} \\ &= 5\end{aligned}$$

Conclusion : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 5$

Exemple 3 :

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre , tel que $AB = 1$.



1. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$.
2. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$.

Correction :

1. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

- On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires .
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=1\times1\times\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}$.

2. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

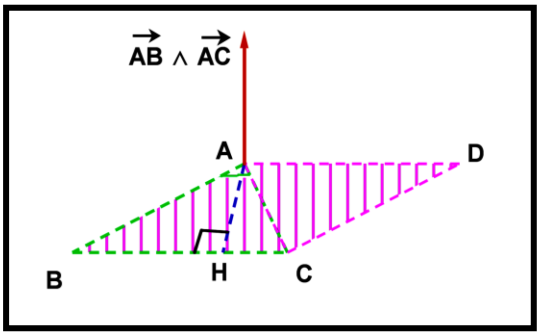
- On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires .
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=2\times2\times\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AE}$.

c. Conséquences :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ orienté .

1. $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ et $\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{0}$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux $(\vec{u}\perp\vec{v})$ le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base orthogonale directe .
3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux $(\vec{u}\perp\vec{v})$ et $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$ le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base orthonormée directe .
4. Le plan passant par le point A a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c.à.d. $P(A,\vec{u},\vec{v})$) alors le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal à ce plan d'où : $P(A,\vec{u},\vec{v})=P(A,\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v})$.
5. $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow(\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $)$.

02. Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs :



a. Propriété :

- La surface du triangle ABC est $S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.
- La surface du parallélogramme ABC est $S_{ABCD}=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

03. L'antisymétrie et la linéarité du produit vectoriel :

a. Propriété :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ orienté et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

1. L'antisymétrie du produit vectoriel : $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$.
2. Bilinéarité du produit vectoriel : $\begin{cases} \vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{v} \\ (\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{u}\wedge\vec{w} \\ (k\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(k\vec{v}) = k(\vec{u}\wedge\vec{v}) \end{cases}$

III. Les coordonnées $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ de l'espace rapporté à une base orthonormée directe :

a. Propriété :

l'espace rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

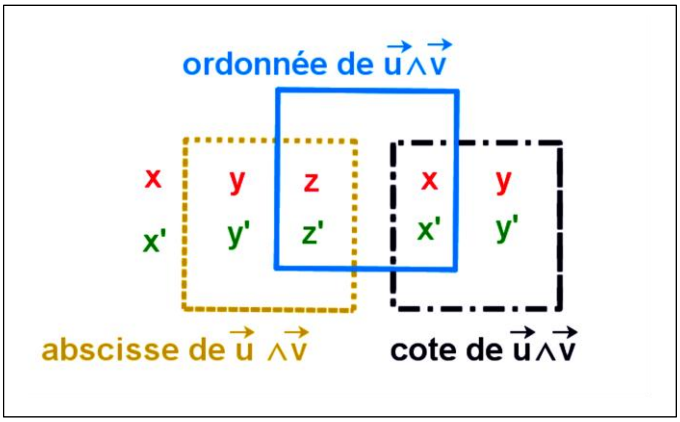
Soient $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}) \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= \Delta_x\vec{i} - \Delta_y\vec{j} + \Delta_z\vec{k}\end{aligned}$$

b. Exemple :

- On a : $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$; $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$; $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$.
- $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

c. Technique :



IV. Distance d'un point à une droite de l'espace :

a. Propriété :

$D(A,\vec{u})$ est une droite passant par le point A et est dirigé par un vecteur directeur $\vec{u}$ de l'espace .

M est un point de l'espace ; la distance du point A à la droite $D(A,\vec{u})$ est :

$$d(M;D(A,\vec{u}))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

b. Exemple :

Calculons la distance du point $M(1,3,0)$ à la droite (D) définie par :

1. la présentation paramétrique suivante $(D):\begin{cases}x=2t\\ y=3-t\\ z=-1+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.

2. Système d'équations cartésiennes suivante $(D):\frac{x+1}{3}=y=\frac{1-z}{2}$.

Correction :

1. Calculons la distance $d(M;D(A,\vec{u}))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

On a : la droite $D(A(0,3,-1),\vec{u}(2,-1,1))$ donc

$\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ et $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1-0\\3-3\\0+1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ donc $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{3}$

D'où : $d(M;D(A,\vec{u}))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

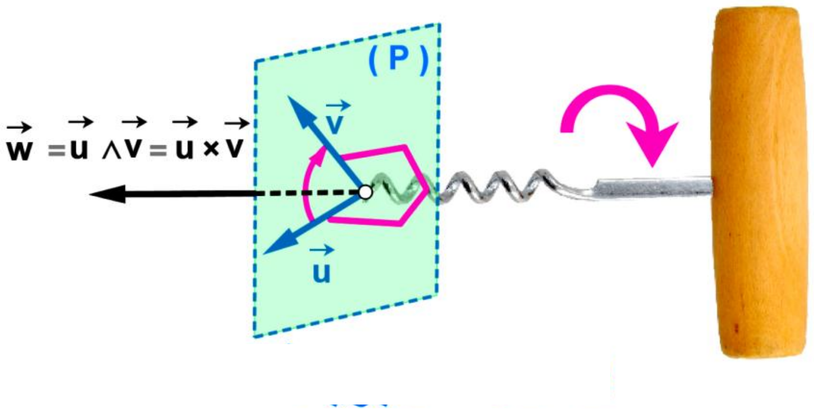
2. Calculons la distance $d(M;D(A,\vec{u}))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

On a : la droite $D(A(-1,0,1),\vec{u}(3,1,-2))$ donc

$\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ et $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}1+1\\3-0\\0-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$ donc $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{75}$

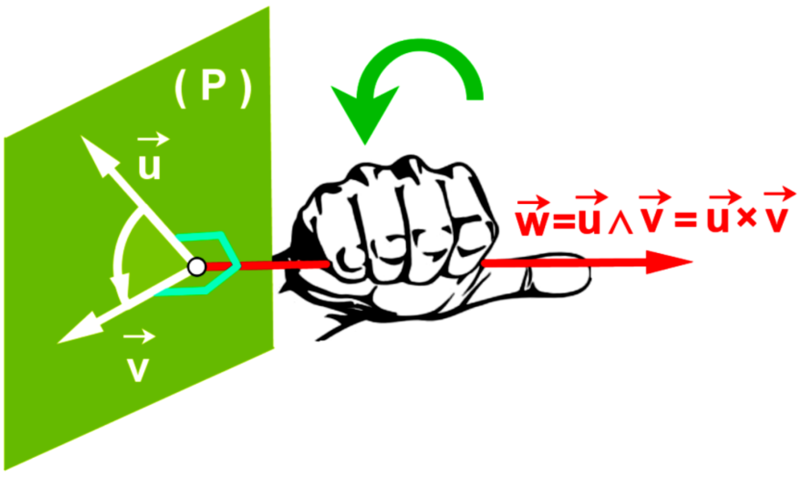
D'où : $d(M;D(A,\vec{u}))=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{1050}}{14}$.

Produit vectoriel on utilise :
règle ≪ de tire bouchon ≫



règle de "tire bouchon "

"règle de la main droite "



règle de " la main droite "

Bonhomme d'Ampère