

Le PRODUIT VECTORIEL

1) ORIENTATION DE L'ESPACE

L'espace (\mathcal{E}) est muni d'un repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé et $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ la base qui lui est associée.

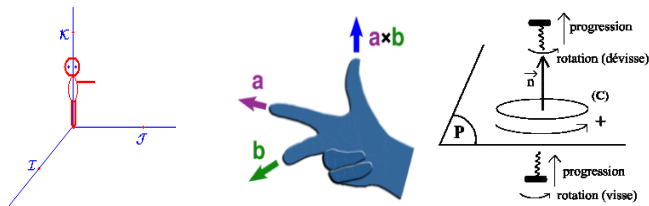
On pose un observateur (imaginaire) sur l'axe $[Oz]$ et il regarde vers l'axe $[Ox]$; On aura deux positions pour l'axe $[Oy]$:

1er cas : $[Oy]$ est à la droite de l'observateur

On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est **indirecte** de même pour le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

2eme cas : $[Oy]$ est à la gauche de l'observateur

On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est **directe** de même pour le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$



2) DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs dans \mathcal{V}_3 .

Le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires

Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que :

$\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ et la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est directe

Et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

Remarque : si \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires.

Soit A un point dans l'espace ; ils existent deux points dans l'espace B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan (P) dans l'espace (\mathcal{E}) .

Et $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normale au plan (P) (utilisable pour déterminer l'Equation cartésienne d'un plan.)

3) Propriétés :

$$1) \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \qquad 2) \vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$3) (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$$

4) Soient A, B et C trois points non alignés on a $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$: est la surface du parallélogramme $ABA'C$

5) Soient A, B et C trois point non alignés, la surface du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

6) A, B et C sont alignés si et seulement ssi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

4) L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soient $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base orthonormée directe de \mathcal{V}_3 , et deux vecteurs

$\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{u}'(x'; y'; z')$ on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Exemple : $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{v}(2; 1; 2)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

5) Intersection de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plan dans l'espace où \vec{n} est un vecteur normal sur (P) et \vec{m} est un vecteur normal sur (Q) , si \vec{n} et \vec{m} sont non colinéaires alors (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{m}$

6) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soient $D(A; \vec{u})$: une droite dans l'espace et M un point ;

la distance du point M à la droite (D) est/

$$d(M; (D)) = MH = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

(Cette propriété reste vraie si $M \in (D)$)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

