Branches infinies :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

La droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de ∞

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à (C_f)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- ∞ : (C_f) admet **une branche parabolique** de direction l'axe des ordonnés au voisinage de ∞
- 0 : (C_f) admet **une branche parabolique** de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
- $a \neq 0$: $$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax$$
  - b : (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de ∞
  - ∞ : (C_f) admet **une branche parabolique** de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞

PROPRIÉTÉ

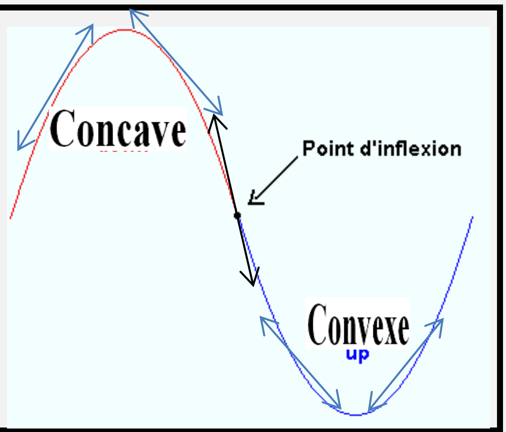
Si : $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$ alors :

→ **la droite** d'équation $y = ax + b$ **est asymptote oblique à** (C_f) au voisinage de ∞.

Concavité d'une courbe – point d'inflexion :

Définitions

- ✓ (C_f) **est convexe sur** I **s'il est au dessus de chacune de ses tangentes sur** I
- ✓ (C_f) **est concave sur** I **s'il est au dessous de chacune de ses tangentes sur** I
- ✓ $A(a, f(a))$ **est un point d'inflexion de** (C_f) **si , en A ,** (C_f) **traverse sa tangente.**



Propriétés

- ✓ $f'' \geq 0$ **sur** $I \iff (C_f)$ **est convexe sur** I
- ✓ $f'' \leq 0$ **sur** $I \iff (C_f)$ **est concave sur** I
- ✓ f'' **s'annule en changeant de signe en** a **alors** $A(a, f(a))$ **est un point d'inflexion de** (C_f)

x		a	
$f''(x)$	+	0	-
Concavité de (C_f)	Convexe	Point d'inflexion $A(a, f(a))$	concave

Propriété

Si f' **s'annule en** a **et ne change pas de signe alors** $A(a, f(a))$ **est un point d'inflexion de** (C_f)

Eléments de symétrie de la courbe d'une fonction :

- **Centre de symétrie :**

Le point $I(a, b)$ est **centre de symétrie** de (C_f) **ssi :**

$$(\forall x \in D_f): \quad 2a - x \in D_f \quad et \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

- **Axe de symétrie :**

La droite (Δ): $x = a$ est **axe de symétrie** de (C_f) **ssi :**

$$(\forall x \in D_f): \quad 2a - x \in D_f \quad et \quad f(2a - x) = f(x)$$

REMARQUE :

- ✓ Si f est **paire** alors (C_f) est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnés**.
- ✓ Si f est **impaire** alors (C_f) est symétrique par rapport à **l'origine du repère**.

Compléments

- **La position relative de (C_f) et d'une droite (Δ) d'équation : $y = ax + b$**

Pour étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ sur un intervalle I, on étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$ sur I

- Si $f(x)-(ax+b)>0$ pour tout x de I alors (C_f) **est au-dessus** de (Δ) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)<0$ pour tout x de I alors (C_f) **est au-dessous** de (Δ) sur I.

- **L'intersection de (C_f) et les axes du repère**

- **Pour déterminer l'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses , on résout l'équation $f(x)=0$**
- **Pour déterminer l'intersection de (C_f) et l'axe des ordonnés on calcule $f(0)$**

Plan d'étude d'une fonction

- ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction s'il n'est pas donné dans l'énoncé.***
- ***Réduire éventuellement cet ensemble par la recherche de la parité et de la périodicité de la fonction.***
- ***Etudier la continuité de la fonction.***
- ***Déterminer les limites de la fonction aux bornes de l'ensemble d'étude .***
- ***Chercher les branches infinies de la courbe.***
- ***Etudier la dérivabilité de la fonction.***
- ***Déterminer la dérivabilité de la fonction aux points où les théorèmes de dérivabilité ne s'appliquent pas. Interpréter géométriquement ces limites en termes de tangentes.***
- ***Calculer la dérivée de la fonction et étudier le signe de cette dérivée (une étude de fonction auxiliaire est parfois nécessaire).***
- ***En déduire le sens de variation de la fonction.***
- ***Résumer tous les résultats précédents dans un tableau après en avoir vérifié la cohérence. Calculer les coordonnées des points « particuliers » rencontrés dans l'étude et des points à tangente horizontale ($f'(x) = 0$).***
- ***Calculer la dérivée seconde pour étudier la convexité de la fonction et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe.***
- ***Tracer la courbe représentative de la fonction :***

  - Choisir astucieusement la position du repère dans le plan et l'unité de longueur si elle n'est pas donnée dans l'énoncé. Sinon, respecter l'unité imposée par l'énoncé.

  - Placer les asymptotes et les points particuliers (avec leur tangente).

  - Tracer la courbe en plaçant quelques autres points sans oublier de vérifier la cohérence avec le tableau de variations