

Corrigé de l'exercice 1 :

Soit n un élément de \mathbb{N}

$$\text{On a : } u_n = 1 - \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right)$$

$$\text{Et puisque : } 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{Alors : } u_n = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{On a : } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\text{Et par suite : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Corrigé de l'exercice 2 :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 3}{2n - 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(5 + \frac{3}{n^2} \right)}{n \left(2 - \frac{7}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{5 + \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{7}{n}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n} = 0$$

2. Soit n un élément de \mathbb{N}

$$\text{On a : } \frac{7n-1}{5n+3} \leq u_n \leq \frac{7n+1}{5n+3} \quad (\text{car } -1 \leq (-1)^n \leq 1)$$

$$\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n-1}{5n+3} = \frac{7}{5} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n+1}{5n+3} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{7}{5}$$

3. On a, pour tout n de \mathbb{N} : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ et $n^2 + 3 > 0$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{-1}{n^2 + 3} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2 + 3}$$

$$\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 3} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 3} = 0$$

Et par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4. Soit n un élément de \mathbb{N}^*

Pour tout k de \mathbb{N} tel que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n &\Leftrightarrow 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 + n^2} \leq \sqrt{k + n^2} \leq \sqrt{n + n^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n + n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{k + n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n + n^2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k + n^2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}$$

$$\text{Donc : } \frac{n}{\sqrt{n + n^2}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n + n^2}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{1 + n^2}} = 1$$

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n + 4 \times 5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n \left(\frac{3^n}{5^n} + 1 \right)}{5^n \left(\frac{3^n}{5^n} + 4 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1}{\left(\frac{3}{5} \right)^n + 4} = \frac{1}{4}$$

Car : (puisque $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n = 0$)

Corrigé de l'exercice 3 :

1. Montrons par récurrence que : $u_n \geq 9$, pour tout n de \mathbb{N}

▷ Pour $n = 0$:

On a $u_0 = 10$

Donc $u_0 \geq 9$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que : $u_n \geq 9$

○ Montrons que : $u_{n+1} \geq 9$

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 9 &= \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19} - 9 \\ &= \frac{17}{19}u_n - \frac{153}{19} \\ &= \frac{17}{19}(u_n - 9)\end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \geq 9$

Donc $u_n - 9 \geq 0$

Donc $\frac{17}{19}(u_n - 9) \geq 0$

Donc $u_{n+1} \geq 9$

Et par suite $u_{n+1} - 9 \geq 0$

▷ On conclut que : $u_n \geq 9$, pour tout n de \mathbb{N}

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19} - u_n \\ &= \frac{-2}{19}u_n - \frac{18}{19} \\ &= \frac{-2}{19}(u_n - 9)\end{aligned}$$

Puisque $u_n - 9 \geq 0$ alors $\frac{-2}{19}(u_n - 9) \leq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout n de \mathbb{N}

Et par suite (u_n) est décroissante .

- Puisque (u_n) est décroissante et minorée alors (u_n) est convergente .

3.

a- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 9 \\ &= \frac{17}{19}(u_n - 9) \\ &= \frac{17}{19}v_n\end{aligned}$$

Donc : $v_{n+1} = \frac{17}{19}v_n$ pour tout n de \mathbb{N}

Et par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{17}{19}$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 - 9 = 10 - 9 = 1$$

b-

On a $v_n = v_0 \left(\frac{17}{19}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N}

Donc $v_n = \left(\frac{17}{19}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N}

c-

▷ On a : $v_n = u_n - 9$ pour tout n de \mathbb{N}

Donc : pour tout n de \mathbb{N}

Et par suite : $u_n = \left(\frac{17}{19}\right)^n + 9$ pour tout n de \mathbb{N}

▷ Puisque $-1 < \frac{17}{19} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{17}{19}\right)^n = 0$

Et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 9$

Corrigé de l'exercice 4 :

1.

▷ Pour $n = 0$:

On a $u_0 = 3$

Donc $u_0 > 2$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que : $u_n > 2$

○ Montrons que : $u_{n+1} > 2$

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 2 &= \frac{12 - 8u_n - 2}{4 - 3u_n} \\ &= \frac{12 - 8u_n - 8 + 6u_n}{4 - 3u_n} \\ &= \frac{4 - 2u_n}{4 - 3u_n} \\ &= \frac{-2(u_n - 2)}{4 - 3u_n}\end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n > 2$

Donc $u_n - 2 > 0$ et $4 - 3u_n < -2 < 0$

Donc $\frac{-2(u_n - 2)}{4 - 3u_n} > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 > 0$

Et par suite $u_{n+1} > 2$

▷ On conclut que : $u_n > 2$, pour tout n de \mathbb{N}

2. a- Soit $n \in \mathbb{N}$:

on a :

▷

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 2} \\ &= \frac{\frac{12 - 8u_n}{4 - 3u_n}}{\frac{12 - 8u_n - 8 + 6u_n}{4 - 3u_n}} \\ &= \frac{12 - 8u_n}{4 - 2u_n} \\ &= \frac{-2(4u_n - 6)}{-2(u_n - 2)} \\ &= \frac{4u_n - 6}{u_n - 2}\end{aligned}$$

▷

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{4u_n - 6}{u_n - 2} - \frac{u_n}{u_n - 2} \\ &= \frac{3u_n - 6}{u_n - 2} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Donc , $v_{n+1} - v_n = 3$ pour tout n de \mathbb{N}

Et par suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 2} = \frac{3}{3 - 2} = 3$$

b- On a : $v_n = v_0 + nr$ pour tout n de \mathbb{N}

Donc : $v_n = 3 + 3n$ pour tout n de \mathbb{N}

c-

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned}v_n = \frac{u_n}{u_n - 2} &\Leftrightarrow u_n v_n - 2v_n = u_n \\ &\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n \\ &\Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = 2v_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n}{v_n - 1}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{2(3 + 3n)}{(3 + 3n) - 1}$$

Et par suite : $u_n = \frac{6 + 6n}{2 + 3n}$ pour tout n de \mathbb{N}

$$\text{▷ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + 6n}{2 + 3n} = 2$$

Corrigé de l'exercice 5 :

1. Montrons par récurrence que : $u_n \geq 1$, pour tout n de \mathbb{N}

▷ Pour $n = 0$:

On a $u_0 = 2$

Donc $u_0 \geq 1$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que : $u_n \geq 1$

○ Montrons que : $u_{n+1} \geq 1$

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 1 &= \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} - 1 \\&= \frac{7u_n + 2 - 2u_n - 7}{2u_n + 7} \\&= \frac{5u_n - 5}{2u_n + 7} \\&= \frac{5(u_n - 1)}{2u_n + 7}\end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \geq 1$

Donc $u_n - 1 \geq 0$ et $2u_n + 7 \geq 9 > 0$

Donc $\frac{5(u_n - 1)}{2u_n + 7} \geq 0$

Donc $u_{n+1} - 1 \geq 0$

Et par suite $u_{n+1} \geq 1$

▷ On conclut que : $u_n \geq 1$, pour tout n de \mathbb{N}

2.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} - u_n \\&= \frac{7u_n + 2 - 2u_n^2 - 7u_n}{2u_n + 7} \\&= \frac{2(1 - u_n^2)}{2u_n + 7}\end{aligned}$$

Puisque $u_n \geq 1$ alors $1 - u_n^2 \leq 0$ et $2u_n + 7 > 0$

$$\text{Donc } \frac{2(1 - u_n^2)}{2u_n + 7} \leq 0$$

Et par suite $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n de \mathbb{N}

D'où (u_n) est décroissante

▷ Puisque (u_n) est décroissante et minorée alors (u_n) est convergente

3.

a- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} - 1}{\frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} + 1} \\ &= \frac{7u_n + 2 - 2u_n - 7}{7u_n + 2 + 2u_n + 7} \\ &= \frac{5u_n - 5}{9u_n + 9} \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\ &= \frac{5}{9} v_n \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = \frac{5}{9} v_n$ pour tout n de \mathbb{N}

Et par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{9}$ et du premier terme

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

b- On a $v_n = v_0 \left(\frac{5}{9}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N}

$$\text{Donc } v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{9}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

c-

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\Leftrightarrow u_n v_n + v_n = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n - u_n v_n = v_n + 1 \\ &\Leftrightarrow u_n (1 - v_n) = v_n + 1 \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 1}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

$$\triangleright \text{ Puisque } -1 < \frac{5}{9} < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 1}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n} = 1$$

Corrigé de l'exercice 6 :

1. On a f est dérivable sur $I = [0,1]$

Soit $x \in I = [0,1]$:

$$\text{On a : } f'(x) = \left(\frac{4x+3}{3x+4}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{(3x+4)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{7}{(3x+4)^2} \text{ pour tout } x \text{ de } I = [0,1]$$

Puisque : $f'(x) > 0$ pour tout x de $I = [0,1]$ alors f est strictement croissante sur $I = [0,1]$

2. On a : f est continue et strictement croissante sur $I = [0,1]$

$$\text{Donc } f(I) = f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

Et par suite $f(I) \subset I$

3. Soit $x \in I = [0,1]$:

On a :

$$\begin{aligned}f(x) - x &= \frac{4x+3}{3x+4} - x \\ &= \frac{4x+3-3x^2-4x}{3x+4} \\ &= \frac{3(1-x^2)}{3x+4}\end{aligned}$$

On a : $x \in I = [0,1]$ donc $1-x^2 \geq 0$ et $3x+4 > 0$

$$\text{Donc } \frac{3(1-x^2)}{3x+4} \geq 0$$

Donc $f(x) - x \geq 0$ pour tout x de $I = [0,1]$

Et par suite (C_f) est au-dessus de $(\Delta): y = x$ sur $I = [0,1]$

4.

a- Montrons que : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de \mathbb{N}

▷ Pour $n = 0$:

$$\text{On a : } u_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } 0 \leq u_0 \leq 1$$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

○ Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$

○ Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

D'après l'hypothèse de récurrence , on a $u_n \in I$

$$\text{Donc } f(u_n) \in f(I)$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \in f(I)$$

Et puisque $f(I) \subset I$, alors $u_{n+1} \in I$

$$\text{D'où } 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

▷ On conclut que $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de \mathbb{N}

b- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $f(x) - x \geq 0$ pour tout x de $I = [0,1]$

Et comme $u_n \in I$, alors $f(u_n) - u_n \geq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, pour tout n de \mathbb{N}

D'où (u_n) est croissante

c- On a : $u_0 = \frac{1}{2} \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N}

▷ f est continue sur $I = [0,1]$

▷ $f(I) \subset I$

▷ Puisque (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente

Donc la limite de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$

Et on a : $f(x) = x \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Puisque $0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$