# I. Généralité sur les suites avec : $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite son premier terme est $u_{n_0}$ : ( rappel )

## A. Suite majorée – suite minorée – suite bornée :

### a. Définitions :

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par un réel $M$ si et seulement si $\forall n\geq n_0; u_n\leq M$ ( ou $\forall n\geq n_0; u_n<M$ ).
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par un réel $m$ si et seulement si $\forall n\geq n_0; u_n\leq M$ ( ou $\forall n\geq n_0; u_n<M$ ).
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée et bornée .
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si $\exists A\in\mathbb{R}^+; \forall n\geq n_0; |u_n|\leq A$ ou $(<A)$.

## B. La monotonie d'une suite :

### a. Définition :

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$ ; $u_n\leq u_{n+1}$ .
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$ ; $u_n<u_{n+1}$ .
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$ ; $u_n\geq u_{n+1}$ .
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$ ; $u_n>u_{n+1}$ .
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si et seulement si $\forall n\geq n_0$ ; $u_n=u_{n+1}$ .
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est périodique de période $T\in\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\forall n\geq n_0$ ; $u_{n+T}=u_n$ .

# II. Suite arithmétique – son terme général – la somme $S_n$ : ( rappel )

### a. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . $r$ est un nombre réel non nul .

- La suite $(u_n)$ est arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_{n_0}$ équivaut à $\forall n\geq n_0 : u_{n+1}-u_n=r$ .
  ( ou encore $\forall n\geq n_0 : u_{n+1}=u_n+r$ ) .
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_{n_0}$ on a :
  $\forall n\geq n_0 : u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$
- Pour la somme suivante : $S_n=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+....+u_n$ ou a : $S_n=\left[\frac{u_n+u_p}{2}\right]\times(n-p+1)$.
  $S_n=\frac{(\text{le premier terme})+(\text{le dernier terme})}{2}\times(\text{ le nombre des termes de la somme })$
- Propriété caractéristique : $\forall p\geq n_0$ ; $\forall q\geq n_0$ ; $u_q=u_p+(q-p)r$ ( avec $q$ et $p$ de $\mathbb{N}$ ) .
- Moyenne arithmétique : $u_i=a$ et $u_{i+1}=b$ et $u_{i+2}=c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r$ on a : $a+b=2c$

**b. Remarque :**

- La somme suivante $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + .... + u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-0+1$ ) .
- La somme suivante $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + .... + u_n$ possède $n$ terme . (c.à.d. $n-1+1$ ) .
- La somme suivante $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + .... + u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-n_0+1$ )

## III. Suite géométrique – son terme général – la somme $S_n$ : ( rappel )

**c. Définition :**

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . $q$ est un nombre réel non nul .

- La suite $(u_n)$ est géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_{n_0}$ équivaut à $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$ .
  ( ou encore $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$ ) .
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_{n_0}$ on a : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$
- Pour la somme suivante : $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + .... + u_n$ ou a :
  - Si $q \neq 1$ on a $S_n = \left[\dfrac{q^{(n-p+1)} - 1}{q-1}\right] \times u_p$ .
  - $q = 1$ : $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p(n-p+1)$ .
- **Propriété caractéristique :** $\forall p \geq n_0$ ; $\forall q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p}$ ( avec q et p de $\mathbb{N}$ ) .
- Moyenne géométrique : $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q on a : $a \times c = b^2$

## IV. Limites d'une suite numérique : $(n \mapsto +\infty)$

### A. Limite finie d'une suite :

**a. Activité :**

- On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$ ; $n \geq 2$ .
- Sur une droite graduée on présente l'intervalle $I_0 = \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$ de centre 0 avec unité de mesure $2$ cm .
- Calculer quelques termes de la suite et on les place sur la droite graduée , que remarquez-vous ?
- Si n tend vers $+\infty$ , que peut-on dire des termes $u_n$ de la suite ?

**b. Vocabulaire :**

- On dit que la limite de la suite $(u_n)$ est 0 ( zéro ) lorsque n tend vers $+\infty$ .
- On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ .

**c. Définition :**

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite $(u_n)$ est le nombre réel $\ell$ si pour tout intervalle ouvert $I_\ell$ et de centre $\ell$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang , on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ .

**d. Propriété :**

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ et ; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^i}=0$ $(i\in\mathbb{N}^*)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ .
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ .

**e. Exemple :**

❖ On considère la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par : $u_n=\frac{1}{n}+3$ , on montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3-3=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

## B. Limite infinie d'une suite :

**a. Définition :**

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

- On dit que la limite de la suite $(u_n)$ est $+\infty$ si pour tout $A$ de $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang , on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ .
- On dit que la limite de la suite $(u_n)$ est $-\infty$ si pour tout $A$ de $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $]-\infty,A[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang , on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ .

**b. Propriété :**

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^i=+\infty$ $(i\in\mathbb{N}^*)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ .

## C. Convergence d'une suite numérique :

**a. Définition :**

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

- Si la limite de la suite $(u_n)$ est finie on dit que la suite $(u_n)$ est convergente .
- Si la limite de la suite $(u_n)$ est infinie ou la suite $(u_n)$ n'a pas de limite on dit que la suite $(u_n)$ est divergente .

**b. Exemple :**

- $u_n = n^4$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'où la suite $(u_n)$ est divergente .
- $u_n = (-1)^n$ cette suite n'a pas de limite car si n est paire on a $u_n = 1$ et si n est impaire on a $u_n = -1$ et la propriété (Si une suite a une limite alors cette limite est unique ) .
- $u_n = \frac{1}{n} + 3n$ ; $\geq 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ d'où la suite $(u_n)$ est convergente .

**c. Propriété :**

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente .
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente .

**d. Exemple :**

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_n = \frac{1}{n^3} + 7$ ; $n \geq 1$ .

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est minorée .
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante .
3. En déduit la convergence de la suite $(u_n)$ .

**Réponse :**

1. la suite $(u_n)$ est minorée :

on a :

$$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^3 > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 7$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 0$$
$$\Rightarrow u_n > 0$$

Par suite : $(u_n)$ est minorée par 0 ( zéro ) .

2. la suite $(u_n)$ est décroissante .

on a :

$$n+1 \geq n \Rightarrow (n+1)^3 \geq n^3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Donc : la suite $(u_n)$ est décroissante .

3. En déduit la convergence de la suite $(u_n)$ :

On a : la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée donc d'après une propriété la suite $(u_n)$ est convergente .

## V. Operations sur les limites des suites :

### a. Propriété :

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques .

- Les opérations sur les suites sont les mêmes que les opération des fonctions.
  exemple : $(u_n)_{n\geq n_0}+(v_n)_{n\geq n_0}=(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ .
- Les propriétés des opérations des limites des suites sont les mêmes que celles des fonctions .
  exemple 1 : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=\ell+\ell'$ .
  exemple 2 : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=-\infty$ .
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $u_n>0$ alors $\ell>0$ .
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$ et $v_n\leq u_n$ alors $\ell'\leq\ell$ .

### b. application :

1. calculer la limite de la suite suivante : $u_n=\dfrac{1}{n}$ ; $n\geq 1$ .

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3=3$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$ .

2. calculer la limite de la suite suivante : $v_n=\left(\dfrac{1}{n}+3\right)\sqrt{n}$ ; $n\geq 1$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+3\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+3\right)\sqrt{n}=+\infty$ .

## VI. Critères de convergences :

### a. Critères :

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites numériques tel que à partir d'un rang $p$ on a pour tout $n\geq p\geq n_0$ ( avec $n\in\mathbb{N}$ ) . $\alpha>0$ et $\ell\in\mathbb{R}$

1. Si $v_n\leq u_n\leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.
2. Si $v_n\geq \alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
3. Si $v_n\leq \alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$.
4. Si $|v_n-\ell|\leq \alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

**b. Application :**

**Application 1 :** On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5$ ; $n > 0$ .

**1.** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$ .

On a :

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \le \frac{(-1)^n}{n} - 5 \le \frac{1}{n} - 5$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \le v_n \le \frac{1}{n} - 5$$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$.

D'après l'un des critères de convergences on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$

**Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$ .

**Application 2 :** On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_n = 2n + \cos(n)$ ; $n \ge 0$ .

**1.** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $-1 \le \cos(n) \le 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \le 2n + \cos(n) \le 2n + 1$

Donc : $2n - 1 \le 2n + \cos(n)$

D'où : $2n - 1 \le u_n$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 1 = +\infty$

D'après l'un des critères de convergences on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$ .

**Application 1 :** On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $v_n = \frac{\cos n}{n}$ ; $n \ge 1$.

**2.** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ .

On a : $|v_n - 0| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \le \frac{1}{n}$ ( car $|\cos n| \le 1$ )

D'où : $|v_n - 0| \le \frac{1}{n}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

**c. Exercice :**

Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$ .

## VII. Suite de la forme particulières :

### A. Suite de la forme : $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$ :

**a. Propriété :**

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ .
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$ .
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ .
- Si $q \leq -1$ alors $q^n$ n'a pas de limite .

**b. Exemple :**

- $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ , car $q = 3 > 1$ .
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{7^n} - \frac{8^n}{7^n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(\frac{8}{7}\right)^n = 0$$

( car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^n = 0$ ; $-1 < \frac{2}{7} < 1$ et $-1 < \frac{8}{7} < 1$ ) .

## B. Suite de la forme $u_n = n^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$

**a. Propriété :**

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$ .
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$ .

**b. Exemple :**

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \sqrt[7]{n^3}$ ; $n \geq 1$.

Calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ :

1ère méthode : On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[7]{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{7}} = +\infty$ car $r = \frac{3}{7} > 0$.

2ième méthode : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[7]{n^3} = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ .

## C. Suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ de la forme $v_n = f(u_n)$ :

**a. Activité :**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$ et la suite $(u_n)$ définie par $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n\geq1}$ .

1. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = f(u_n)$ .
   - Ecrire la suite $(v_n)$ en fonction du terme $u_n$ .
   - En déduit $v_n$ en fonction de n .
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ .
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ en déduit une relation entre $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et f et $\ell$ .

**b. Propriété :**

Si une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell$ ( c.à.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ) et f est une fonction continue en $\ell$ alors la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente vers $f(\ell)$ ( c.à.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(\ell)$ ) .

**c. Exemple :**

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{5x-6}{x+3}$ et la suite $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$ ; $n \geq 1$ et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = f(u_n)$.

1. Ecrire la suite $(v_n)$ en fonction de n .
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .
3. On détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Correction :

1. la suite $(v_n)$ en fonction de n .

on a : $v_n = f(u_n) = \dfrac{5u_n - 6}{u_n + 3} = \dfrac{5\times\dfrac{\cos n}{n} - 6}{\dfrac{\cos n}{n} + 3} = \dfrac{5\cos n - 6n}{\cos n + 3n}$ .

Conclusion : $v_n = \dfrac{5\cos n - 6n}{\cos n + 3n}$ .

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $-1 \leq \cos n \leq 1$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $-1\times\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}\times\cos n \leq 1\times\dfrac{1}{n} \Rightarrow -\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ( d'après un critère de convergence ) .

3. On détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la fonction f est continue en 0 ( car f est continue sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ ) et $v_n = f(u_n)$ donc d'après la propriété la limite de la suite $(v_n)$ est $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(0) = -2$.

**Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$

## D. Suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ :

### a. Définition :

Soit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tel que $\forall n \geq n_0$ ; $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f est une fonction .

Si on a :

- f est une fonction continue sur un intervalle $I$ .
- $f(I) \subset I$ .
- $u_{n_0} \in I$ ( le premier terme ) .
- La suite $(u_n)$ est convergente ( vers $\ell \in \mathbb{R}$ )

  Alors $\ell$ est solution de l'équation $x \in I$ , $f(x) = x$ ( c.à.d. $\ell$ vérifie $\ell = f(\ell)$ ) .

### b. Exemple :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x+6}$ .

1. Donner le tableau de variation de f .
2. On considère l'intervalle $I = [0,3]$ .
   - Déterminer $f(I)$ .
3. On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$ ; $n \geq 0$
   - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 \leq u_n \leq 3$
   - Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante .
   - La suite $(u_n)$ est convergente ?
   - Ecrire la suite $(u_n)$ en fonction de f et de $u_n$
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ .

**Correction :**

1. On donne le tableau de variation de f .

   On a :

   - $f'(x) = \left(\sqrt{x+6}\right)' = \dfrac{(x+6)'}{2\sqrt{x+6}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0$ .
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .
   - Le tableau de variation de f est :

| $x$ | $-6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2.** On détermine $f(I)$ .

La fonction f est continue sur son domaine de définition $D_f = [-6,+\infty[$ donc f est continue sur $I = [0;3]$

On a : $f(I) = f([0;3])$

$= [f(0), f(3)]$ ( car l'image d'un intervalle est un intervalle et puisque f est croissante ).

$= [\sqrt{6};3]$

Conclusion : $f(I) = f([0;3]) = [\sqrt{3},3] \subset [0,3]$ .

**3.** ..

- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 \le u_n \le 3$

  On démontre par récurrence :

  - On vérifie la relation est vrai pour $n = 0$, on a : $0 \le u_0 = 2 \le 3$ donc la relation est vrai pour $n = 0$ .
  - On suppose que la relation est vraie pour n de $\mathbb{N}$ c.à.d. $0 \le u_n \le 3$ ( hypothèse de récurrence )
  - On démontre que : la relation est vraie pour $n+1$ c.à.d. on démontre que $0 \le u_{n+1} \le 3$ .

  D'après hypothèse de récurrence on a :

  $0 \le u_n \le 3 \Rightarrow 6 \le 6 + u_n \le 9$ ; $(+6)$

  $\Rightarrow \sqrt{6} \le \sqrt{6+u_n} \le 3$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante)

  $\Rightarrow \sqrt{6} \le u_{n+1} \le 3$

  Donc la relation est vraie pour $n+1$.

  Conclusion : On applique le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $0 \le u_n \le 3$

- Montrons que la suite $(u_n)$ est croissante .

  On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \ge 0$

  On a :

  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \dfrac{6+u_n-u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n} = \dfrac{(3-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$ son signe est le signe de

  $(3-u_n)(2+u_n)$.( on peut écrire $(3-x)(2+x)$ avec $x = u_n$ )

| $u_n$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(3-u_n)(2+u_n) = u_{n+1} - u_n$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

  Puis que $0 \le u_n \le 3$ donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$.

  Conclusion : la suite $(u_n)$ est croissante

- La suite $(u_n)$ est convergente car la suite est croissante et majorée par 3 ( d'après une propriété )
- On écrire la suite $(u_n)$ en fonction de f et de $u_n$ , on a $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_{n+1} = f(u_n)$ .

5. On déterminer la limite de la suite $(u_n)$ .

On a :

- f est une fonction continue sur l'intervalle $I$ .
- $f(I) = f([0;3])$.
- $u_0 = 2 \in [0;3]$ ( le premier terme ) .
- La suite $(u_n)$ est convergente ( vers $\ell \in \mathbb{R}$ )

Donc d'après une propriété on a $\ell$ est solution de l'équation $x \in I$ , $f(x) = x$ .

On résout l'équation $x \in I$ , $f(x) = x$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{x+6} = x \\ &\Leftrightarrow x+6 = x^2 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (3-x)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \in [0;3] \text{ ou } x = -2 \notin [0;3] \end{aligned}$$

D'où : $\ell = 3 \in [0;3]$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$