Exercice 1 : (BAC 2007 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = u_n + n - 1$.

① - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

② - a - Calculer v_n en fonction de n.

b - En déduire u_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u_n$.

③ - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$ et $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

Exercice 2 : (BAC 2008 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \succ 1$.

② - On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$, puis Calculer v_n en fonction de n.

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ puis Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u_n$.

Exercice 3 : (BAC 2009 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$.

puis montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 - u_n \succ 0$.

②- On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$.

a - Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$, puis Calculer v_n en fonction de n.

b – Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n=\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$, en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : (BAC 2010 Session normale)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{2u_n} \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n-1\succ 0$.

② - On pose $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$.

a – Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, puis déduire que :

$(\forall n\in\mathbb{N}):\quad v_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b – Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n=\dfrac{v_n-1}{2v_n-1}$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}u_n=1$.

③ - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}w_n$, tel que (w_n) est la suite définie par $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad w_n=\ln(u_n)$.

Exercice 5 : (BAC 2010 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{u_n+21} \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

① - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n\succ 0$.

② - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_{n+1}\prec\dfrac{1}{7}u_n$.

③ - Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

④ - a - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad u_n\prec\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$.

b - Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 : (BAC 2011 Session normale)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{8u_n+5} \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n\succ 0$.

② - On pose $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$.

a – Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison 5, puis Calculer v_n en fonction de n.

b - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 7 : (BAC 2011 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{15u_n+1}$ et $u_0=1$.

① - a - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}$.

b - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n\succ\dfrac{1}{3}$.

② - On pose $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n=1-\dfrac{1}{3u_n}$.

Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$, puis Calculer v_n en fonction de n.

③ - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n=\dfrac{1}{3-2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 : (BAC 2012 Session normale)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=\dfrac{10}{11}u_n+\dfrac{12}{11}$ et $u_0=11$.

① - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}-12=\dfrac{10}{11}(u_n-12)$.

② - a - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n\prec12$.

b - Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante

c - Déduire que la suite (u_n) est convergente.

③ - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n=u_n-12$.

a - En utilisant la question ① Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\dfrac{10}{11}$, puis Calculer v_n en fonction de n.

b - Calculer u_n en fonction de n, puis calculer sa limite.

Exercice 9 : (BAC 2012 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4}$ et $u_0=3$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n\succ1$.

② - On pose $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

a - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $1-v_n=\dfrac{2}{u_n+1}$. Et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})$: $1-v_n\succ0$.

b - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

③- a – Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$, puis Calculer v_n en fonction de n.

b – Montrer que : $\lim_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

✍ Exercice 10 : (BAC 2013 Session normale)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $:(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad u_{n+1}=\frac{25}{10-u_n}$ et $u_1=0$.

① - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad 5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$.

puis montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad 5-u_n\succ 0$.

② - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad v_n=\frac{5}{5-u_n}$.

a - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad v_{n+1}=\frac{10-u_n}{5-u_n}$, puis vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ v_{n+1}-v_n=1$

b – Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad v_n=n$, En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\quad u_n=5-\frac{5}{n}$.

c – Calculer : $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n$.

✍ Exercice 11 : (BAC 2013 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $:(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$ et $u_0=2$.

① - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_{n+1}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)$.

②- a – Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n\succ 1$.

b – Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c – Montrer que la suite (u_n) est convergente.

③ - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad v_n=u_n-1$.

a – Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$, puis Calculer v_n en fonction de n.

b – Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n+1$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

✍ Exercice 12 : (BAC 2014 Session normale)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $:(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$ et $u_0=13$.

①- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n\prec 14$.

② - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad v_n=14-u_n$.

a – Montrer que (v_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis Calculer v_n en fonction de n.

b – Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

c – Calculer la petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n\succ 13{,}99$.

✍ Exercice 13 : (BAC 2014 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{1+u_n}$ et $u_1=5$.

① - Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $u_n \succ 2$.

② - Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $v_n=\dfrac{3}{u_n-2}$.

a - Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n-2}$, puis montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b - Ecrire (v_n) en fonction de n, en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $u_n=2+\dfrac{3}{n}$.

c - Calculer la limite de (u_n).

✍ Exercice 14 : (BAC 2015 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=\dfrac{2}{5}u_n+3$ et $u_0=4$.

① - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n \prec 5$.

② - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3}{5}(5-u_n)$, En déduire que la suite (u_n) est croissante.

③ - En déduire que (u_n) est convergente.

④ - Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n=5-u_n$.

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n

b - En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n=5-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, puis calculer la limite de (u_n).

✍ Exercice 15 : (BAC 2016 Session normale)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=\dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ et $u_0=2$.

① - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}-3=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$, puis montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n \prec 3$.

② - Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n=\dfrac{u_n-1}{3-u_n}$.

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n=\dfrac{1+3\,v_n}{1+\,v_n}$, puis écrire u_n en fonction de n.

c - Calculer la limite de la suite (u_n).

✍ *Exercice 16 :* (BAC 2016 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{16}u_n + \dfrac{15}{16} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - *a - Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \succ 1$.

b - Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{15}{16}(u_n - 1)$, *puis montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

c - En déduire que (u_n) *est convergente.*

② - *Soit* (v_n) *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = u_n - 1$.

a - Montrer que (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{16}$, *puis écrire* v_n *en fonction de n .*

b - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$, *puis déterminer la limite de la suite* (u_n).

✍ *Exercice 17 :* (BAC 2017 Session de rattrapage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 17 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 12 \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - *a - Montrer par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \succ 16$.

b - Montrer que la suite (u_n) *est décroissante, et déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

② - *Soit* (v_n) *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = u_n - 16$.

a - Montrer que (v_n) *est une suite géométrique .*

b - Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = 16 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, *puis déterminer la limite de la suite* (u_n).

c - Calculer la petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n \prec 16{,}0001$.