

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1:

Soit (u_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 2$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < 6$.
- 3) Etudier la monotonie de (u_n) .
- 4) Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par: $v_n = u_n - 6$
 - a) Calculer v_0 et v_1 .
 - b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - c) Exprimer v_n en fonction de n .
 - d) En déduire u_n en fonction de n .
- 5) Exprimer S_n et w_n en fonction de n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$w_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- 6) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

Exercice2 :

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout

entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par: pour tout entier naturel n ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. En déduire la limite de (u_n) .
- 2) a. Déterminer la monotonie de la suite (S_n) .
- b. Calculer S_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (S_n) .

Exercice3:

Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} / u_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$

- 1) Calculer u_1 et v_0 .
- 2) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n .
- 4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 5) Exprimer S_n en fonction n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
- 6) En déduire la valeur de S : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{99}$.
- 7) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice4:

Soit (u_n) une suite définie par:

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$.
- b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 2) Soit (v_n) une suite tel que : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on précisera son premier terme et sa raison.
 - b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - c) Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice5:

Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 1$
- 2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \geq \frac{1+u_n}{2}$
- b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 3) a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$.
- b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- c) calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice6:

On considère la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 1$$

- 1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 0$.
- b- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(1+u_n)}{2+u_n}$
- c- Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 2) Soit (v_n) la suite réelle définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
 - a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - c- Calculer la limite de la suite (u_n) .