Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n-3$.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
3) On définit la suite (v_n) par : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b) En déduire que : $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
   c) Soit la somme S_n définie par : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2} - \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} > u_n$.
3) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4) On définit la suite (v_n) par : $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
5) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n - 5$.
6) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

1) Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
2) Montrer que : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n + 1)(u_n - 4) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
3) En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4) Montrer que la suite (u_n) est converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 : a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$

1) Montrer par récurrence que : $u_n > 0$ et $v_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
2) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$. En déduire que $u_n \leq v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 .En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

5) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 5 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) Pour tout entier naturel n ,on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

5) En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

Exercice 6 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

On définit la suite (v_n) par : $v_n = nu_n - 1$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$.

1) Montrer par récurrence que : $u_n > 0$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$.

2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

3) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5) Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

6) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).