

# Suites numériques

## I) Définition, vocabulaires et notations.

**Définition :** Toute fonction  $u$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{N}$ , ou d'une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{R}$  est dite suite numérique.

*Notation et vocabulaire.*

- L'image de  $n$  par la suite  $u$  est notée  $u_n$  au lieu de  $u(n)$ .
- La suite est notée  $(u_n)_{n \in I}$  (ou plus simplement  $(u_n)$  si  $n \in \mathbb{N}$ ).
- $u_n$  est un « terme » de la suite, et on l'appelle terme général de la suite.
- Si la suite commence par  $u_1$ , alors  $u_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  terme, ou terme de rang  $n$ .
- Si la suite commence par  $u_0$ ,  $u_n$  est le terme de rang  $n+1$ .
- On peut définir une suite par une **formule explicite**, c'est-à-dire par une relation du type :  $u_n = f(n)$
- On peut définir une suite par **réurrence**, c'est-à-dire par une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$  ou par d'autres types.

## II) Monotonie d'une suite numérique

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  tel que :  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq p \text{ avec } p \in \mathbb{N}\}$

**Définitions :** On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est strictement décroissante, si  $(\forall n \geq p) : u_{n+1} \leq u_n$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est strictement croissante, si  $(\forall n \geq p) : u_{n+1} \geq u_n$ .

## III) Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

**Définitions :**

- On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est **majorée** lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que  $(\forall n \geq p) : u_n \leq M$ .  
Le nombre  $M$  est alors appelé un **majorant** de la suite  $(u_n)_{n \geq p}$ .
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est **minorée** lorsqu'il existe un réel  $m$  tel que :  $(\forall n \geq p) : u_n \geq m$ .  
Le nombre  $m$  est alors appelé un **minorant** de la suite  $(u_n)_{n \geq p}$ .
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

**Remarques :**

- Si  $(u_n)$  est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme  $u_0$ .
- Si  $(u_n)$  est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme  $u_0$ .

## IV) Suite arithmétique – Suite géométrique.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
$(u_n)_{n \geq p}$ est une suite	S'il existe un réel $r$ tel que : $(\forall n \geq p) : u_{n+1} - u_n = r$ ( $r$ est appelé <i>raison de la suite</i> )	S'il existe un réel $q$ tel que : $(\forall n \geq p) : u_{n+1} = q u_n$ ( $q$ est appelé <i>raison de la suite</i> )
$u_n$ en fonction de $n$	$(\forall n \geq p) : u_n = u_p + (n - p)r$	$(\forall n \geq p) : u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des premiers termes d'une suite	$S = \left( \frac{u_p + u_n}{2} \right) (n - p + 1)$	$S = u_p \left( \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$ avec $q \neq 1$

Avec  $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n$

## V) Limite d'une suite numérique .

### 1) Suites de référence – suite convergente.

**Définition :** On dit qu'une suite  $(u_n)$  est **convergente** vers le réel  $a$  lorsque tout intervalle ouvert contenant  $a$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ .

- Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

- Des suites **convergentes** vers  $0$  :  $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ;  $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $p$  est un entier naturel non nul.
- Des suites **divergentes** vers  $+\infty$  :  $(n^p)_{n \geq 0}$  ;  $(\sqrt[n]{n})_{n \geq 0}$  où  $p$  est un entier naturel non nul.
- Limite d'une suite **géométrique** :

$q$	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

### 2) Critères de convergence.

**Théorème 1 :** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies sur  $\mathbb{N}$ .

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \geq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Théorème 2 :** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies sur  $\mathbb{N}$ .

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Théorème des gendarmes :** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites définies sur  $\mathbb{N}$ .

Si, à partir d'un certain rang,  $v_n \leq u_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$  alors  $(u_n)$  est **convergente** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ .

**Théorème des gendarmes :** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies sur  $\mathbb{N}$ .

Si, à partir d'un certain rang,  $|u_n - L| \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  alors  $(u_n)$  est **convergente** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ .

**Théorème 3 :**

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

**Remarque :** Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

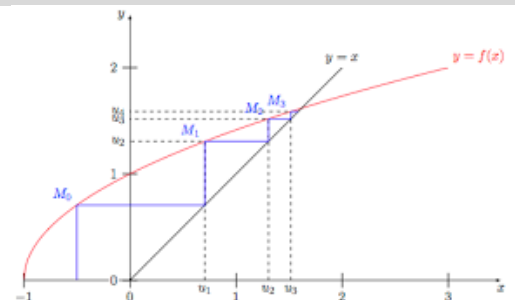
### 3) Théorème de convergence des suites récurrentes.

**Propriété :** Soit  $(u_n)$  une suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et} \quad u_0 \in I$$

Si  $f$  est **continue** sur  $I$ ,  $f(I) \subset I$  et  $(u_n)$  est **convergente** alors la limite  $l$  de  $(u_n)$  est une solution de l'équation  $f(x) = x$

On dit que  $l$  est un "point fixe" de la fonction  $f$ .



### Principe de récurrence :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ , on procède en deux étapes, puis on conclut.

- **Première étape :** On vérifie que  $P_0$  est vraie.
- **Deuxième étape :** On suppose que pour un entier naturel  $n$  quelconque, la propriété  $P_n$  est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition  $P_{n+1}$  est vraie.
- **Conclusion :** lorsque les deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  positif.