LIMITES DE SUITES
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Déterminer la limite (éventuelle) des suites (u_n) ci-dessous :

1) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$ **2)** $u_n = \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ **3)** $u_n = 7 + \dfrac{5}{3}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ 4) $u_n = 3\times(-2)^n$

5) $u_n = 5^n - 4^n$ **6)** $\dfrac{3^n+2}{8^n-1}$ **7)** $u_n = \dfrac{1}{n+3}$ **8)** $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$ **9)** $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$

Exercice n°2.

Montrez que la suite (u_n) satisfait la relation (R), puis vous en déduirez la limite de cette suite.

a) $u_n = \dfrac{\cos n}{n+1}$ (R): $|u_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$ **b)** $u_n = \sin(2n) + n$ (R): $u_n \geq n-1$

c) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ (R): $|u_n| \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$ **d)** $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$ (R): $u_n \geq \dfrac{n-1}{3}$

Exercice n°3.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$. On pose $v_n = u_n - 3$.

1) a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice n°4.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \text{ pour tout entier naturel n} \end{cases}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $n \leq u_n$. Qu'en déduit-on ?

Exercice n°5.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$

1) a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Quel semble être la limite de (u_n) ?

2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

Exercice n°6.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout *n* , $0 \leq u_n < 2$

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout *n* par $v_n = 2 - u_n$

a) Quel est le signe de v_n ?

b) Montrer que, pour tout entier *n*, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

Exercice n°7.

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) a) Montrer que (u_n) est majorée par 4.

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) Retrouver le résultat du 1.c)

c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2(4 - u_n)$

Exercice n°8.

On considère la suite *u* définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$

2) Montrer que la suite *u* est strictement croissante.

3) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°9.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des quatre premiers termes de la suite (u_n)

2) Montrer par récurrence que pour tout entier *n*, si $0 < u_n < 2$

3) Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geq 0$

4) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n . Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier *n*. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

5) Montrer que pour tout *n*, $|u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2}|u_n - 2|$.

6) En déduire que pour tout *n*, $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

7) Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice n°10.

Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2\cos\theta$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout entier naturel *n*

1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ (On rappelle que, pour tout réel x , on a : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$)

2) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel *n* , on a $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$

3) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel *n* , par $v_n = \dfrac{\theta}{2^n}$ Déterminer la limite de la suite (v_n)

4) En déduire que (u_n) est convergente ; quelle est sa limite ?

Exercice n°11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle stationnaire ?

2) On pose $u_0 = 1$.

a) Démontrer les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{3}\right)^2$

b) Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante pour $n \geq 1$

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_1 et de *n*.

b) Calculer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver la limite de $(u_n)_n$

Exercice n°12.

On définit deux suites *u* et *v* par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel *n* : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$

1) On appelle *w* la suite définie pour tout entier naturel *n* par $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que *w* est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison

b) Déterminer la limite de la suite *w*

2) a) Montrer que la suite *u* est croissante

b) Montrer que la suite *v* est décroissante

c) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

3) Montrer que les deux suites *u* et *v* convergent et ont la même limite que l'on appellera l

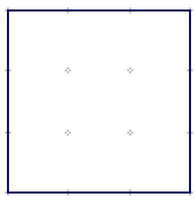
4) On appelle *t* la suite définie pour tout entier naturel *n* par $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que *t* est une suite constante. Déterminer cette constante

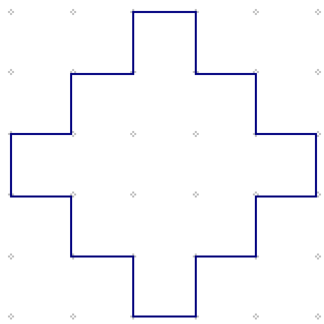
b) Déterminer alors la valeur de l

Exercice n°13.

On considère un carré F_1 de côté de longueur 1. Au milieu de chaque côté, à l'extérieur de F_1, on place un carré de côté 1/3, dont on supprime le côté en contact avec la figure initiale. On obtient ainsi une figure F_2.



F_1



On procède de même avec F_2. On obtient ainsi une nouvelle figure F_3. En réitérant le procédé, on construit une suite (F_n) de figures. On note p_n le périmètre de F_n.

1) Tracer F_3.

2) Exprimer en fonction de *n*:

a) c_n, le nombre de côtés de F_n.

b) l_n, la longueur de chaque côté de F_n.

c) p_n , le périmètre de F_n .

3) La suite (p_n) converge-t-elle?

On note A_n l'aire de F_n .

4) Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n .

5) En déduire A_n en fonction de *n*.

6) Montrer que (A_n) converge et calculer sa limite.

7) Quelles réflexions vous inspire ce problème?