أكاديمية الجهة الشرقية

سلسلة7:الأعداد العقدية" الجزء الأول"

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: أكتب الأعداد العقدية التالية على شكلهم الجبري أو الديكارتي:

$z_1=(2+i)(-1+i)+(1+2i)^2$ و $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

$z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}$ و $z_4=\dfrac{1+i}{3-i}$ و $z_5=(1+i)^{10}$

تمرين2: نعتبر في المستوى العقدي النقط $A(-2;1)$ و $B(-3;-1)$ و $C\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$.

ما ألحاق النقط A و B و C ؟

تمرين3: نعتبر في المستوى العقدي النقط A, B , C ,D و E ألحاقهم على التوالي: $z_A=1+i$ و $z_B=3+2i$

$z_C=2-i$ و $z_D=-2i$ و $z_E=2$

1. مثل النقط A, B , C , D و E في المستوى العقدي
2. حدد z_I لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$
3. حدد $z_{\overrightarrow{AB}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$
4. بين أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

تمرين4: نعتبر النقط : $A(1+i)$ و $B\left(\dfrac{1}{2}+2i\right)$ و $C(-1-i)$

هل النقط A و B و C مستقيمية؟

تمرين5: حدد مرافق الأعداد العقدية التالية: $z_1=5-2i$ و

$z_2=3+2i$ و $z_3=-5-3i$ و $z_4=2i$

$z_5=-7$ و $z_6=-5-3i+i(2-i)$

تمرين6: ليكن z عددا عقديا.

حدد وأكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافقات الأعداد العقدية التالية:

$Z_1=(2+i)(5-i)$ و $Z_2=2z+5i$ و $Z_3=\dfrac{z-1}{-3z+i}$.

تمرين7: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين:

1. $2z+i\overline{z}=5-4i$
2. $z=2\overline{z}-2+6i$

تمرين8: نعتبر في المستوى العقدي العدد العقدي U

ولتكن M صورة العدد العقدي z ونضع : $U=(z-2i)(\overline{z}-1)$

نضع : $z=x+yi$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$

1)حدد بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد العقدي U

2) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون:

أ) U عددا حقيقيا

ب) U عددا تخيلي صرف

تمرين9: حدد معيار الأعداد التالية : $z_1=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و

$z_2=-\sqrt{2}-i$

$z_3=3-4i$ و $z_4=-2i$ و $z_5=-4$

تمرين10: نعتبر في المستوى العقدي $(o;i,j)$ النقط C , B, A ألحاقهم على التوالي: $z_A=2$ و $z_B=1+\sqrt{3}i$ و $z_C=3+i\sqrt{3}$

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

تمرين11: حدد معيار كل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1=5\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $z_2=(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)$ و $z_3=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

تمرين12: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$|z-1-2i|=|z-7+2i|$

تمرين13: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$|z-2i|=3$

تمرين14: نعتبر النقط A و B و C و D و E و F التي ألحاقها على التوالي:

$z_A=2$ و $z_B=-2i$ و $z_C=2+2i$ و $z_D=3i$

$z_E=-3$ و $z_F=-2+2i$

أنشئ النقط A و B و C و D و E و F

باستعمال التمثيل في المستوى العقدي حدد عمدة كل عدد من الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D و z_E و z_F

تمرين15: حدد عمدة العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية: $z_1=5i$ و $z_2=-1$.

$z_3=-3i$ و $z_4=2$

تمرين16: حدد شكلا مثلثيا للأعداد العقدية التالية

$z_1=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=1-i$ و $z_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_4=-1-\sqrt{3}i$

تمرين17: حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1=\sqrt{3}+3i$ $z_2=-2+2i$.

$z_3=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $z_4=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

تمرين18: نعتبر العددين العقديين $z_1=\sqrt{3}-i$ و $z_2=1-i$ و $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$

1. أعط شكلا مثلثيا لكل من z_1 و z_2 و Z.
2. أكتب Z على الشكل الجبري ثم استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

تمرين19: نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي:

$z_A=3+5i$ و $z_B=3-5i$ و $z_C=7+3i$

1)بين أن: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2)استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و أن $BC = 2AC$

تمرين20: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي :

$z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$

1. بين أن : $z' = z+4-2i$ وتسمى الكتابة العقدية للإزاحة
2. تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T
3. حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة T

تمرين21: نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(3;-2)$ ونسبته $k = 4$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي h ونعتبر النقطة A التي لحقها $z_A = 3+5i$

1. بين أن : $z' = 4z-9+6i$ وتسمى الكتابة العقدية للتحاكي
2. حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي h

تمرين22: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطتين A و B التي لحقهما على التوالي هي : $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران r **الذي مركزه** B **وزاويته** $\frac{\pi}{2}$

1. بين أن : $z' = iz+4i+12$ وتسمى الكتابة العقدية للدوران r
2. بين أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران r **هو** $z_C = 10+11i$

تمرين23: نضع: $U = (\bar{z}-i)(\bar{z}+iz)$

حدد و أرسم (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي بحيث يكون U عددا حقيقيا

تمرين24: حدد هندسيا مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون $\frac{z+2i}{z-4i}$ عددا حقيقيا.

تمرين25: حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون.

$Z = z^2 - \bar{z}$ عددا حقيقيا

تمرين26: لتكن (C) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$|z-1+2i| = 1$.

و (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث: $|z| = |\bar{z}-1+2i|$ حدد و أنشئ المجموعتين (C) و (Δ).

تمرين27: حدد معيار و عمدة كل من الأعداد العقدية التالية

$z_1 = 1+i$ و $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ و $z_3 = 7i$ و $z_4 = -6i$

و $z_5 = 2$ و $z_6 = -5$ و $z_7 = (1-i\sqrt{3})(1+i)$ و

$z_8 = (1+i)^3$ و $z_9 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

تمرين28: ليكن العددين العقديين : $z_1 = (1-i)$ و $z_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}$

1. حدد معيار و عمدة العددين العقديين z_1 و z_2
2. استنتج معيار و عمدة ل : $z = \frac{z_1}{z_2}$
3. استعمل النتائج السابقة لحساب $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$

تمرين29: نعتبر في المستوى العقدي النقط A, B, C ,D ألحاقهم على التوالي: $z_A = -1+i$ و $z_B = -1-i$ و $z_C = 2i$ و $z_D = 2-2i$

1. حدد معيار و عمدة العددين العقديين $z_1 = \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ و

$z_2 = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$

2. استنتج طبيعة كل من المثلثين ACD و BCD

تمرين30: أحسب U و V

1) $U = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$

2) $V = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$

تمرين31: نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A = -2$ و. $z_B = 1+i$ و $z_C = -1-3i$.

حدد قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}})$

وما طبيعة المثلث. ABC ؟

تمرين32: ليكن z عددا عقديا.

أكتب, بدلالة $\bar{z}$, مرافقات الأعداد العقدية التالية:

$Z_1 = 3z-6i$ و $Z_2 = (z-5i)(\bar{z}+5)$ و $Z_3 = \frac{2z^2+z-1}{-3z+i}$.

تمرين33: نعتبر المتتالية (z_n) العقدية المعرفة كالتالي :

$z_0 = 1$ و $z_{n+1} = (-1+i)z_n + (2i+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة كالتالي : $U_n = z_n - i$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. بين أن (U_n) متتالية هندسية و حدد أساسها q وحدها الأول U_0
2. أحسب q^8
3. أكتب U_n بدلالة n واكتب U_n على الشكل المثلثي
4. أحسب المجموع التالي :

$S = 1+i+i^2+i^3+....+i^{100}$

تمرين34: نعتبر التطبيق g من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي:

$\forall z \in \mathbb{C}-\{i\}$ $g(z) = \frac{z+2}{z-i}$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $g(z) = iz$. (E)

2) ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) أحسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002} + \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2002}$

أوجد الأعداد الصحيحة n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا.

3)المستوى العقدي ρ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

أ)حدد و أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ من ρ التي تحقق $|g(z)|=1$.

ب)حدد و أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ من التي تحقق $\mathrm{Re}(g(z))=0$.

تمرين35:نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$z\in\mathbb{C};z^2-\left(4+2i\sqrt{3}\right)z+4i\sqrt{3}=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) و اكتب الحلول على الشكل المثلثي.

2) لتكن A و B و C صور الأعداد العقدية 2 و $1+i\sqrt{3}$ و $3+i\sqrt{3}$ على التوالي.

أ)أنشئ النقط A و B و C.

ب)حدد قياسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$.

ج)بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين36:نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$,المعادلة:

$(E)\quad z^2-\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)z+i+\sqrt{3}=0$

1)بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يجب تحديده.

2)استنتج الحل الثاني للمعادلة (E).

3)لتكن النقط A و B و C ألحاقها على التوالي هي: $z_A=1+i$ و $z_B=i$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$

أ)أكتب z_A و z_B و z_C على الشكل المثلثي.

ب)حدد قياسا للزاوية: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

ج)حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث:

$|z-1+i\sqrt{3}|=|z-1-i|$.

تمرين37:في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B التي ألحاقهما على التوالي $z_A=1-2i\ ;\ z_B=-2+2i$

ولتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$

1)أنشئ النقط A و B

2)حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) وأحسب شعاع الدائرة (C)

3)لتكن D النقطة ذات اللحق : $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$

أ. حدد الشكل الجبري ثم المثلثي للعدد z_D

ب. بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C)

ت. حدد لحق النقطة E التي تنتمي للدائرة (C) والتي تحقق :

$\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega E}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

تمرين38:في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $z_A=i\ ;\ z_B=2$

I. 1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.

2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

3) مثل النقط A و B و B' .

II. نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها zبالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

1) حدد A'و B'صورتي النقطتين Aو B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ . بين أنه $\frac{z'-z}{i-z}=-i$ لكل z مخالف للعدد i.

ب . بين أن: $\begin{cases}MM'=MA\\ \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ لكل نقطة Mمخالفة للنقط A .

ج . استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M حيث $M\neq A$.

3) حدد (Γ)مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث :

$|z-2|=\sqrt{2}$.

4) أ . بين أن : $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$ لكل عددعقدي z .

ب . استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un