

التمرين الأول

[I] حدد الشكل الجبري للأعداد العقدية التالية :

$$z_3 = 5 + 2i - (4 + 3i)(2 - i) \quad (3) \quad z_2 = (1 + 2i)(3 - i) \quad (2) \quad z_1 = 1 + 2i(1 + i) \quad (1)$$

$$z_7 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} \quad (7) \quad z_6 = \frac{3 + 2i}{2 - i} \quad (6) \quad z_5 = \frac{2}{3 - 4i} \quad (5) \quad z_4 = (3 - 2i)^3 \quad (4)$$

[II] حدد العدد z في كل من الحالات التالية : (يكتب z على الشكل الجبري)

$(3 - i)z - 3 - i = 0$	$iz + 2 - i = z$	$(2 + i)z + 3 + i = 0$
$i\bar{z} + (1 - i)z - 3 - i = 0$	$z - 2i\bar{z} - 1 = 0$	$\frac{2z - i}{z - 1} = 1 + i$

التمرين الثاني

أحسب معيار العدد Z في الحالات التالية :

$$Z = (1 + i)(2 - i)(-3 + i) \quad (4) \quad Z = 3 - i\sqrt{7} \quad (3) \quad Z = -\sqrt{3} + 3i \quad (2) \quad Z = 2 - 3i \quad (1)$$

$$Z = \frac{2012 + i}{1 - 2012i} \quad (8) \quad Z = (\sqrt{3} - i) - (i\sqrt{3} + 1)i \quad (7) \quad Z = \frac{\sqrt{3} - i}{4 + 2i} \quad (6) \quad Z = (-\sqrt{3} + i)^4 \quad (5)$$

التمرين الثالث

حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في الحالات التالية

$$|2\bar{z} + 4 - i| = 6 \quad \textcircled{4} \quad |\bar{z} - 2| = |iz + 1 + 2i| \quad \textcircled{3} \quad |z + 3 - i| = 4 \quad \textcircled{2} \quad |z - 1 + i| = |z + 2 - 3i| \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{z - i}{z + i} \in i\mathbb{R} \quad (8) \quad (z - 2i)(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R} \quad \textcircled{7} \quad \frac{iz - 1}{z + 1} \in i\mathbb{R} \quad \textcircled{6} \quad \bar{z}z + z - i(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R} \quad \textcircled{5}$$

التمرين الرابع

[1] مثل في المستوى العقدي (P) النقط التالية: $A(2 - 3i)$ و $B(3 + 2i)$ و $C(4i)$.

[2] أ. حدد z_D لحق النقطة D التي من أجلها يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

ب. حدد z_K لحق K مركزه $ABCD$.

[3] أ. حدد لحق E نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمحور الحقيقي،

ب. حدد لحق F نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمحور التخيلي.

[4] هل النقط $E(3 + 2i)$ و $F(1 + 4i)$ و $G(-1 + 6i)$ مستقيمية؟ علل جوابك.

التمرين الخامس

ليكن z عددا عقديا غير منعدما. نضع $Z = z + \frac{1}{z}$

(1) حدد الشكل الجبري للعدد Z في كل حالة من الحالتين: أ. $z = 1 + i$ ب. $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

(2) بين أن: $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad / \quad Z = \bar{Z} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0$

(3) حدد المجموعة: $\Gamma = \{M(z) / Z \in \mathbb{R}\}$

التمرين السادس

ليكن z عددا عقديا يخالف i . نضع $f(z) = \frac{z + i}{z - i}$

(1) حدد الشكل الجبري للعدد $f(z)$ من أجل $z = 1 + 2i$

(2) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $f(z) = -2i$

$$(3) \text{ أ. بين أن } \overline{f(z)} = f(z) \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

ب. استنتج المجموعة (C) للنقط $M(z)$ والتي يكون من أجلها $f(z)$ حقيقي

(4) حدد المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ والتي يكون من أجلها $f(z)$ تخيلي

التمرين السابع

حدد الشكل المثلثي للعدد z في الحالات التالية: (1) $z = -1 + i$; (2) $z = -\sqrt{3} + i$

$$(1) z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} ; (2) z = \sqrt{3} + 3i \quad (3) z = (1+i)^5 ; (4) z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}i)^4$$

$$(4) z = \sin \theta - i \cos \theta ; (3) z = \sin 2\theta + 2i \sin^2 \theta \quad (2) z = \frac{2i}{\sqrt{3} - i} ; (1) z = (2 - 2i)(-1 - i\sqrt{3})$$

التمرين الثامن

نعتبر العدد العقدي $z = \sqrt{2} - 1 + i$

$$\text{☺ بين أن } z^2 = 2(\sqrt{2} - 1)(1 + i)$$

☺ حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي $a = 1 + i$

☺ استنتج الشكل المثلثي للعدد z وحدد $\cos \frac{\pi}{8} ; \sin \frac{\pi}{8}$

التمرين التاسع

ليكن z عددا عقديا بحيث $z \neq i$ ونضع $Z = \frac{2+iz}{z-i}$

$$(1) \text{ أحسب } Z \text{ من أجل } z = 2 + \frac{1}{2}i$$

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } Z = 2$$

$$(3) \text{ أ. أكتب } \bar{Z} \text{ بدلالة } z \text{ و } \bar{z}$$

$$\text{ب. بين أن } (\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}) : \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow (z + \bar{z})(i(z - \bar{z}) + 1) = 0$$

ج. استنتج (E) مجموعة النقط M ذات اللحق z والتي يكون من أجلها Z عددا تخيليا

$$(4) \text{ حدد (D) مجموعة النقط } M(z) \text{ والتي يكون من أجلها } |Z| = 1$$

$$(5) \text{ أ. بين أن } (\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}) : \bar{Z} = Z \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 - i(z - \bar{z}) + 4 = 0$$

ب. استنتج (C) مجموعة النقط M ذات اللحق z والتي يكون من أجلها Z عددا حقيقي

التمرين العاشر

لكل عدد عقدي z يخالف i نضع $Z = \frac{iz}{z-i}$

$$(1) \text{ أحسب } Z \text{ من أجل } z = 2 + 3i$$

$$(2) \text{ حل في المجموعة } \mathbb{C} \text{ المعادلة } Z = 1 + 2i$$

$$(3) \text{ أ. بين أن: } (\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}) \quad (\bar{Z} = Z) \Leftrightarrow \left(\left(z - \frac{1}{2}i \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{2}i \right) - \frac{1}{4} = 0 \right)$$

ب. استنتج مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى (P) والتي يكون من أجلها Z حقيقي

(4) حدد المجموعة (D) للنقط $M(z)$ من المستوى (P) والتي يكون من أجلها $|Z| = 1$

التمرين الحادي عشر

(1) حدد مجموعة النقط $M(z)$ والتي يكون من أجلها النقط $M(z)$ ، $N(iz)$ ، $P(-1)$ مستقيمية

(2) نعتبر النقط A ، B ، C التي أحاقها $a = 2i$ ، $b = \sqrt{3} + i$ ، $c = \sqrt{3} + 3i$ على التوالي

- أ- حدد الشكل المثلثي للعدد $\frac{b-a}{c-a}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
 ب- تحقق أن $b = c - a$ واستنتج طبيعة الرباعي $OACB$
 ج- بين أن c^{2007} عدد حقيقي سالب

التمرين الثاني عشر

- نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A , B , C التي أحاقها على التوالي $a = \sqrt{3} + i$, $b = -2i$ و $c = -2\sqrt{3}$
 1) حدد الشكل المثلثي للعدد a , b
 2) أ- بين أن : $\frac{b-a}{b-c} = -i \frac{\sqrt{3}}{2}$
 ب- استنتج طبيعة المثلث ABC
 3) حدد d لحق النقطة D كي يكون $ABCD$ مربع

التمرين الثالث عشر

- نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A , B , C التي أحاقها على التوالي $a = 5i$, $b = 2 + i$ و $c = 6 + 3i$
 بين أن $\frac{c-a}{b-a} = 1 + i$ واستنتج قياسا للزاوية $(\overline{AB}, \overline{AC})$ وبين أن $AC = \sqrt{2}AB$

التمرين الرابع عشر

- نعتبر الأعداد $a = i$, $b = 1 + 4i$, $c = 4 + 5i$ و $d = 3 + 2i$
 أ- أحسب $\frac{b-a}{d-a}$ وأحسب $\left| \frac{b-a}{d-a} \right|$ واستنتج طبيعة المثلث ABD
 ب- أحسب $\frac{d-b}{c-a}$ واستنتج طبيعة الرباعي

التمرين الخامس عشر

- نعتبر النقطتين A ; B ذات اللق $z_A = \sqrt{3} - i$ و $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ على التوالي
 1) حدد الشكل المثلثي للعدد z_B , z_A
 2) أحسب $\frac{z_B}{z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياسا للزاوية $(\overline{OA}, \overline{OB})$
 3) نعتبر العدد $z_C = z_A + z_B$ والنقطة $C(z_C)$
 أ- ماهي طبيعة الرباعي $OACB$
 ب- حدد قياسا للزاوية $(\overline{OA}, \overline{OC})$ واستنتج أن $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$
 ج- استنتج قيمة كل من $\sin \frac{\pi}{12}$; $\cos \frac{\pi}{12}$

التمرين السادس عشر

- نعتبر العدد العقدي $Z = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$ ونضع $\theta \equiv \arg(Z) [2\pi]$
 1) بين أن $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ (دون حساب θ)
 2) أ- بين أن $Z^2 = 2(\sqrt{2} - 1)(1 + i)$
 ب- حدد الشكل المثلثي للعدد $u = 1 + i$ واستنتج أن $\theta = \frac{\pi}{8}$
 ج- استنتج قيمة $\tan \frac{\pi}{8}$