

## الأعداد العقدية

### تمرين 1

- 1- حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية  
 $\frac{2i}{2-i} + \frac{(1-2i)^2}{i}$  ;  $\frac{3-2i}{1+i}$  ;  $\frac{1}{3-2i}$
- 2- أحسب  $(1+i)^2$  واستنتج  $(1+i)^{230}$
- 3- أحسب  $\sum_{k=0}^{521} i^k$

### تمرين 2

في المستوى العقدي نعتبر النقط  $A(1)$  و  $B(z)$  و  $C(-iz)$

1- نضع  $z = x + iy$  حيث  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  و  $i \neq z$  و  $z \neq 1$

حدد الشكل الجبري للعديدين  $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot z}$  و  $\frac{1-z}{1+iz}$

2- حدد مجموعة النقط  $B$  حيث  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط مستقيمة

3- حدد مجموعة النقط  $B$  حيث  $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot z}$  عدد تخيلي صرف.

### تمرين 3

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات التالية  $-2i \cdot \bar{z} + z = 1$  و  $(1-i)z - 2\bar{z} = 1 - 5i$

و  $2|z|^2 - z^2 = 3$  و  $z \cdot \bar{z} + \bar{z} = 4 - 3i$

### تمرين 4

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط  $M(z)$  في كل حالة من الحالتين التاليتين

$$|z-2| = |z+2i| - 2$$

$$|z-1+i| = 3 - 1$$

### تمرين 5

أكتب على الشكل المثلي الأعداد عقدية  $3 + i\sqrt{3}$  و  $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$  و  $(1-i\sqrt{3})^{24}$

### تمرين 6

نعتبر العددين العقدين  $v = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$  ;  $u = 2 - 2i$

1- احسب معيار وعمدة كل من  $u$  و  $v$

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلية لـ  $\frac{u}{v}$  ثم استنتج

$$\cos \frac{7\pi}{12} ; \sin \frac{7\pi}{12}$$

### تمرين 7

نضع  $u = -2 + 2i$

1- أحسب معيار وعمدة  $u$

2- حل جبريا  $z^2 = u$  و استنتج  $\cos \frac{3\pi}{8}$  ;  $\sin \frac{3\pi}{8}$

### تمرين 8

نعتبر العدد العقدي  $z = 1 + i\sqrt{3}$

بين أن النقط  $A(z)$  و  $B(-z)$  و  $C(z^2)$  و  $D\left(\frac{2}{z}\right)$  متداورة

### تمرين 9

1- ليكن  $z_0 = \left[1; \frac{2\pi}{5}\right]$  نضع  $\alpha = z_0 + z_0^4$  و  $\beta = z_0^2 + z_0^3$

أ- بين أن  $1 + \alpha + \beta = 0$

ب- استنتج أن  $\alpha$  و  $\beta$  حلبي المعادلة  $x^2 + x - 1 = 0$

2- أ- حدد  $\alpha$  بدلالة  $\cos \frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة  $x^2 + x - 1 = 0$  واستنتج  $\cos \frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط  $A_0(1)$  و  $A_1(z_0)$  و  $A_2(z_0^2)$  و  $A_3(z_0^3)$  و

$A_4(z_0^4)$  و حدد طبيعة  $A_0A_1A_2A_3A_4$

### تمرين 10

المستوى العقدي  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ . نعتبر النقط  $A; I; B$  التي أحاقها على التوالي

هي  $1; 1-2i; -2+2i$ . لتكن  $(C)$  الدائرة التي أحد أقطارها هو  $[AB]$ .

1) أنشئ النقط  $A; I; B$ .

2) حدد  $z_\Omega$  لحق النقطة  $\Omega$  مركز الدائرة  $(C)$ . احسب شعاع الدائرة  $(C)$ .

3) لتكن  $D$  النقطة ذات اللحق  $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ .

حدد الشكل الجبري للعدد  $z_D$  ثم بين أن النقطة  $D$  تنتمي للدائرة  $(C)$ .

3) لتكن  $E$ ، النقطة ذات اللحق  $z_E$ ، التي تنتمي للدائرة

$(C)$  و التي تحقق  $\left(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

4) أ- حدد معيار وعمدة العدد  $z_E + \frac{1}{2}$ .

ب- استنتج أن  $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

### تمرين 11

نضع:  $v = \frac{5-3iz}{2+iz}$  لكل  $z$  من  $\mathbb{C} - \{2i\}$  و لتكن النقطة

$M(z)$  صورة  $z$  في المستوى العقدي.

1) بين أن:  $(\forall z \in \mathbb{C} - \{2i\}), v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

2) استنتج مجموعة النقط  $M(z)$  بحيث يكون  $v \in \mathbb{R}$ .

**تمرين 12**ليكن  $(x; \alpha) \in \mathbb{R}^2$ 

$$C_n = \sum_{k=0}^n \sin(x+k\alpha) \quad \text{و} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \cos(x+k\alpha)$$

أحسب  $C_n$  و  $S_n$  (يمكن حساب  $C_n + iS_n$ )

**تمرين 13**

$$C_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

اختصر الكتابة

**تمرين 14**

$$\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

ليكن

نعتبر المعادلة (E):

$$z \in \mathbb{C} \quad (1+iz)^3 (1-i \tan \alpha) = (1-iz)^3 (1+i \tan \alpha)$$

1- ليكن  $z_0$  حل للمعادلة (E)أ- بين أن  $|1+iz_0| = |1-iz_0|$ ب- استنتج أن  $z_0$  عدد حقيقي

$$2- \text{أ- أحسب } \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \text{ بدلالة } e^{i\alpha}$$

$$\text{ت- نضع } z = \tan \theta \text{ حيث } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ . استنتج حلول}$$

المعادلة (E)

**تمرين 15**نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة

$$(E): z^2 + 2(1 + \cos \theta)z + 2(1 + \cos \theta) = 0$$

$$\theta \in ]-\pi; \pi[$$

1- حل المعادلة (E)

2- أحسب معيار و عمدة جذري المعادلة (E) (ناقش حسب

قيم  $\theta$ )**تمرين 16**

$$u = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$$

لكل عدد عقدي مخالف لـ  $i$  نضع

$$1- \text{ اثبت أن } [2\pi] \arg u = -\arg z + 2\arg(z-i) \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{i\}$$

$$\text{و أن } |u| = |z|$$

$$2- \text{ بين إذا كان } |z|=1 \text{ فإن } u = -i$$

3- حدد مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $u$  تخيلي صرف.**تمرين 17**

$$1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة (E): } z^2 + z + 1 = 0$$

$$2) \text{ نعتبر في } \mathbb{C} \text{ المعادلة (F): } z^2 = \bar{z}$$

أ- بين أنه إذا كان  $z$  حلا للمعادلة (F) فإن  $z=0$  أو  $|z|=1$ ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة:  $z^3 = 1$  أو  $z=0$ 3) حل المعادلة (F) في  $\mathbb{C}$ .

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$

**تمرين 18**1- حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

2- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  الحدودية

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

a. بين أن الحدودية  $P(z)$  تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا.b. حدد الأعداد الحقيقية  $a$ ;  $b$ ;  $c$  حيث:

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

c. حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z)$ **تمرين 19**

$$1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } z^2 + 2z + 4 = 0 \text{ (E)}$$

2) اكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي.

3) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي أحاقها

على التوالي هي  $z_A = 2$  و  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$  و

$$z_C = -1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{أ- بين أن: } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC.

**تمرين 20**نعتبر في  $\mathbb{C}$  الحدودية:  $P(z) = z^3 + (3-i)z^2 + (6-2i)z + 4-4i$ 

$$1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$2) \text{ بين أن } z_0 = -1 + i \text{ حل للمعادلة: } P(z) = 0$$

$$3) \text{ أ- تحقق من أن: } P(z) = (z+1-i)(z^2 + 2z + 4)$$

ب- استنتج الحلين الآخرين  $z_1$  و  $z_2$  للمعادلة:  $P(z) = 0$ ج- حدد الترميز الأسّي لـ  $z_0$  و  $z_1$  و  $z_2$ . (حيث  $\Im_m(z_1) > 0$ ).4) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ,نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها هي على التوالي  $z_0$  و  $z_1$  و  $z_2$ 

بين أن النقط A و B و C مستقيمية

5) نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته  $\frac{\pi}{6}$ . لتكن  $M(z)$ نقطة من المستوى  $(M \neq O)$ ، و النقطة  $M'(z')$  صورتها

بالدوران R.

$$\text{أ- بين أن: } \left| \frac{z'}{z} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg \frac{z'}{z} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{ب- استنتج أن: } z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z \text{ (الكتابة العقدية لـ R)}$$

ج- حدد لحق كل من  $A'$  و  $B'$  صورتي A و B بالدوران R**تمرين 21**

$$1- \text{ بين أن } 1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$2- \text{ أحسب بدلالة } \tan \theta \text{ العدد } \frac{e^{i2\theta} - 1}{e^{i2\theta} + 1}$$

**تمرين 22**

$$\text{بين أن } e^{i\frac{\pi}{11}} + e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{i\frac{5\pi}{11}} + e^{i\frac{7\pi}{11}} + e^{i\frac{9\pi}{11}} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2 \sin \frac{\pi}{22}}$$

$$\text{استنتج } \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

**تمرين 23**

1) حل في C المعادلة :  $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$   
 2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية C الحدودية :  
 $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$   
 أ- احسب  $P(2i)$ .

ب- حدد العددين b و c بحيث :  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$   
 ج- حل في C المعادلة  $P(z) = 0$

3) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.  $(O, \vec{u}, \vec{v})$   
 نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي هي :  
 $z = \sqrt{3} - i$  و  $z_B = \sqrt{3} + i$  و  $z_C = 2i$

ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

أ- اكتب على الشكل المثلي  $\frac{z_C}{z_B}$  و  $\frac{z_B}{z_A}$

ب- بين أن الكتابة العقدية للدوران R هي :  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$   
 ت- بين أن  $R(A) = B$  و  $R(B) = C$   
 ج- بين أن الرباعي OABC معين.

**تمرين 24**

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط A و B و C و D و E التي ألقاها على التوالي هي :  $z_A = 1 - i$  و  $z_B = 3 + i$

و  $z_C = -3$  و  $z_D = 2$  و  $z_E = -4$ .

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث :  $z' = (1+i)z + 1$

1) حدد A' و B' صورتين النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ- بين أن OMEM' متوازي الأضلاع إذا، فقط إذا، كان  $z^2 - 3z + 3 = 0$

ب- حل في المجموعة C المعادلة  $z^2 - 3z + 3 = 0$

3) أ- عبر عن  $z' + 4$  بدلالة  $z - 2$ .

ب- استنتج أن  $|z' + 4| = |z - 2|^2$  ثم عبر  $\arg(z' + 4)$  بدلالة  $\arg(z - 2)$ .

ج- بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D وشعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها وشعاعها.

**تمرين 25**

نعتبر  $t \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  و المعادلة (E) التالية :

$$(E): z \in \mathbb{C} \quad z^2 \cos^2 t - 4z \cos t + 5 - \cos^2 t = 0$$

1- حل المعادلة (E)

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

$M_1$  و  $M_2$  هما صورتا حل المعادلة (E) في المستوى العقدي

حدد مجموعة النقط  $M_1$  و  $M_2$  عندما يتغير t

في  $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  وأنشئها في المعلم  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

**تمرين 26**

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي

هي :  $z_A = 4 + i$  ;  $z_B = 4 - i$  ;  $z_C = -i$

1. مثل النقط A و B و C

2. لتكن  $\Omega$  النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  . حدد لحق النقطة S.

1. بين أن النقط A و B و S و C تنتمي إلى نفس دائرة ( $\Gamma$ )  
 ينبغي تحديد مركزها وشعاعها . أرسم ( $\Gamma$ ).

**تمرين 27**

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقهما على

التوالي هما :  $z_A = i$  ;  $z_B = 2$

I- حدد لحق النقطة  $B_1$  صورة النقطة B بالتحاكي الذي

مركزه A ونسبته  $\sqrt{2}$ .

1) حدد لحق النقطة  $B'_1$  صورة النقطة  $B_1$  بالدوران الذي

مركزه A وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

2) مثل النقط A و B و B' .

II - نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها

z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث :  $z' = (1+i)z + 1$  .

1) حدد A' و B' صورتين النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ- بين أنه  $\frac{z' - z}{i - z} = -i$  لكل z مخالف للعدد i.

ب- بين أن :  $\left\{ \frac{MM'}{MA} \right\} = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  لكل نقطة M مخالفة للنقط A.

ج- استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقاً من النقطة M حيث  $M \neq A$ .

3) حدد ( $\Gamma$ ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث :  $|z - 2| = \sqrt{2}$ .

4) أ- بين أن :  $(1+i)(z-2) = z' - 3 - 2i$  لكل عدد عقدي z.

ب- استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى ( $\Gamma$ )

فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها

**تمرين 28**

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، نعتبر النقط :

النقطة A ذات اللح  $a = 7 - i\sqrt{3}$

النقطة B ذات اللح  $b = 5 + 3i\sqrt{3}$

النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

(1) أ- ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  . حدد

الكتابة العقدية للدوران R .

ب- بين أن  $R(A) = B$  ثم استنتج طبيعة أن المثلث OAB .

(2) حدد q لحق النقطة Q .

(3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .

(4) بين أن  $\frac{k-a}{k}$  تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

(5) لتكن C النقطة ذات اللح  $c = \frac{2a}{3}$  ؟

أ- أحسب  $\frac{k-b}{k-c}$  .

ب- ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

**تمرين 29**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  
 $(O; \vec{u}; \vec{v})$  . لتكن  $A(-2+3i)$  و  $B(1-3i)$  نقطتين .

نعتبر  $M(z)$  حيث  $z \neq -2+3i$  نضع  $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1- أ- حدد علاقة بين عمدة  $z'$  و الزاوية الموجهة  $(\widehat{MA; MB})$

ب- حدد وأنشئ المجموعتين

$$(E_1) = \left\{ M(z) / \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$$

$$(E_2) = \{ M(z) / |z'| = 2 \}$$

2- حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين  $E_1$  و  $E_2$

**تمرين 30**

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين  
 أ-  $z^4 = 1$  ( يمكن ملاحظة أن  $(z^2+1)(z^2-1) = z^4 - 1$  )

$$ب- \left( \frac{z-i}{z+i} \right)^4 = 1$$

(2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وليكن A عددا عقديا .  
 نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z :

$$(E) : \left( \frac{z-i}{z+i} \right)^n = A$$

P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و -i و z على التوالي .

أ- بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن  $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$

ب- بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن

$$|A| = 1$$

ج- استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع

حلولها حقيقية .

**تمرين 31**

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم .  
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$  . نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على

التوالي هما :  $z_A = 1 ; z_B = -2$  .

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعروف ب :

$$Z = \frac{z-1}{z+2}$$

(1) حدد مجموعة النقط M ذات اللح z في كل من الحالتين التاليتين :

أ-  $|Z| = 1$  ب-  $Z \in \mathbb{R}$

(2) أ- بين أنه لكل z مخالف ل -2 لدينا :

$$(z+2)(z-1) = -3$$

ب- نعتبر النقطة M ذات اللح z و النقطة M' التي

لحقها Z .

بين أن  $M' \neq A$  ثم حدد  $AM' \times BM'$  و  $(\vec{u}, \overline{AM'}) + (\vec{u}, \overline{BM'})$

ج- علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها

B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد

مركزها و شعاعها .

(3) أ- حدد  $(\Gamma)$  مجموعة النقط M ذات اللح z حيث

$$Z \in i\mathbb{R}$$

ب- لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع  $d = \frac{1+2ix}{1-ix}$  و نسمي

D النقطة ذات اللح d . حدد الشكل الجبري للعدد  $\frac{d-1}{d+2}$  ثم

استنتج أن النقطة D تنتمي ل  $(\Gamma)$  .

ج- ليكن  $\theta$  عنصرا من المجال  $]-\pi, \pi]$  . نضع

$$f = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\theta}$$

و نسمي F النقطة ذات اللح f .

\* بين أن العدد  $U = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$  تخيلي صرف .

\* بين أن  $U = \frac{f-1}{f+2}$  . ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟