



.01

نكتب z على شكل $a+bi$ مع a و b من \mathbb{R} حيث : $z = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$ ؛

$$. z = 2 + 6i - (-5 + 7i) + 2 + 5 + 6i - 7i = 7 - i$$

$$. z = (1 - 2i)(2 - 5i) = 1 \times 2 + 1 \times (-5i) - (2i) \times 2 - (2i) \times (-5i) = 2 - 5i - 4i - 10 = -8 - 9i$$

$$. z = 2i(1 - 2i)(1 - 2i) = 2i(1 + 2i)(1 - 2i) = 2i(1^2 - (2i)^2) = 2i + 2i \times 4 = 10i$$

$$. z = (1 + 3i)^2 (-5 + 7i) = (1 + 2 \times 3i - 9)(-5 + 7i) = (-8 + 6i)(-5 + 7i) = 40 - 56i - 30i - 42 = -2 - 86i$$

$$. 3i - \frac{7}{i} = 3i - \frac{7 \times (-i)}{i \times (-i)} = 3i - \frac{-7i}{1} = 3i + 7i = 10i$$

$$. z = \frac{8}{2 - 3i} = \frac{8(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{16 + 24i}{2^2 + 3^2} = \frac{16}{13} + \frac{24}{13}i$$

$$. z = \frac{1}{2 - 7i} + \frac{1}{2 + 7i} = \frac{1 \times (2 + 7i) + 1 \times (2 - 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{4}{2^2 + 7^2} = \frac{4}{53}$$

$$. z = \frac{8i - 1}{2 - 3i} = \frac{(8i - 1)((2 + 3i))}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{16i - 24 - 2 - 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{-26 + 13i}{13} = -2 + i$$

$$. z = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^2 = \left(\frac{2+2i+2i-1}{2^2+1}\right)^2 = \left(\frac{1+4i}{5}\right)^2 = \frac{1-16+8i}{25} = \frac{-15}{25} + \frac{8}{25}i$$

.02

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم لحق النقطة M هو العدد العقدي $z = x + yi$ مع x و y من \mathbb{R} نربط كل عدد

$$. Z = \frac{z - 2 - i}{z + i} \text{ عقدي } z \text{ (حيث } z \neq -i \text{ بالعدد العقدي)}$$

.01 حدد : $\text{Re}(Z)$ و $\text{Im}(Z)$.

• نحسب :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z - 2 - i}{z + i} = \frac{x + yi - 2 - i}{x + yi + i} = \frac{(x - 2 + (y - 1)i)}{(x + (y + 1)i)} = \frac{((x - 2 + (y - 1)i))(x - (y + 1)i)}{(x + (y + 1)i)((x - (y + 1)i))} \\ &= \frac{(x - 2)x + (y - 1)(y + 1) + ((x - 2)(-y - 1) + (y - 1)x)i}{x^2 + (y + 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2} + \frac{(x - 2)(-y - 1) + (y - 1)x}{x^2 + (y + 1)^2} i \\ &= \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2} + \frac{2y - x + 2}{x^2 + (y + 1)^2} i \end{aligned}$$



خلاصة: و $\text{Im}(Z) = \frac{(x-2)(-y-1) + (y-1)x}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{2y-x+2}{x^2 + (y+1)^2}$

02. حدد مجموعة النقط M من المست $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}$ وى حيث يكون:

أ- $\text{Im}(Z) = \frac{2y-x+2}{x^2 + (y+1)^2} = 0$ عددا حقيقيا يكافئ:

يكافئ: $2y - x + 2 = 0$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لمستقيم

خلاصة: مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون Z عددا حقيقيا المستقيم الذي معادلة ديكارتية له هي: $2y - x + 2 = 0$

ب- $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} = 0$ عددا تخيليا صرفا يكافئ

يكافئ $\frac{(x-1)^2 + (x-0)^2 - 2}{x^2 + (y+1)^2}$

يكافئ $(x-1)^2 + (x-0)^2 - 2 = 0$

يكافئ $(x-1)^2 + (x-0)^2 = 2 = \sqrt{2}^2$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لدائرة مركزها النقطة Ω التي لحقها $z_{\Omega} = 1$ و شعاعها $r = \sqrt{2}$

خلاصة: مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون Z عددا تخيليا صرفا هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω التي لحقها $z_{\Omega} = 1$

شعاعها $r = \sqrt{2}$

ج- $|Z| = \sqrt{2}$ أي: $Z = \left| \frac{z-2-i}{z+i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|z-2-i|}{|z+i|} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |x-2+(y-1)i| = \sqrt{2}|x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2(x^2 + (y+1)^2)$

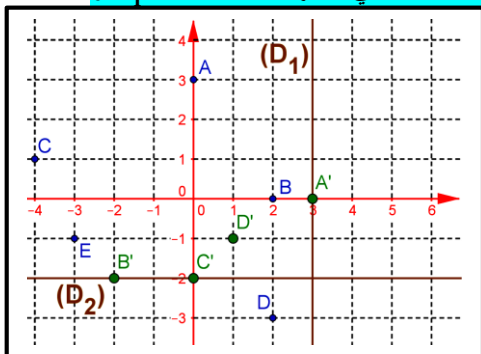
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 4y + 2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{5}^2$

خلاصة: مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون $|Z| = \sqrt{2}$ هي الدائرة التي مركزها النقطة I التي لحقها $z_I = -2-2i$

شعاعها $r = \sqrt{5}$



03

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

01. نعطي ألق النقط A و B و C و D و E.

هي على التوالي: $z_A = 3i$ و $z_B = 2$ و $z_C = -4+i$ و $z_D = 2-3i$ و $z_E = -3-i$

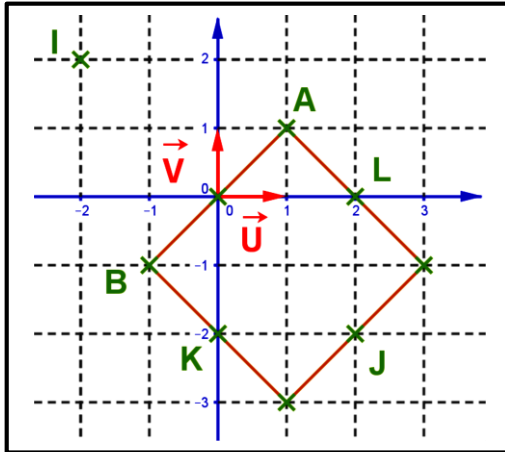


02. ننشئ النقط A' و B' و C' و D' التي أحاقها 3 و $-2-2i$ و $-2i$ و $1-i$.

03. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نحدد مبيانيا معيار وعمدة للحق كل نقطة من النقطة التالية :

- بالنسبة ل A : المعيار هو $|z_A| = \sqrt{2}$ العمدة هي $[2\pi]$ $\arg(z_A) \equiv \frac{\pi}{4}$
- بالنسبة ل B : المعيار هو $|z_B| = \sqrt{2}$ العمدة هي $[2\pi]$ $\arg(z_B) \equiv \frac{-3\pi}{4}$
- بالنسبة ل I : المعيار هو $|z_I| = 2\sqrt{2}$ العمدة هي $[2\pi]$ $\arg(z_I) \equiv \frac{3\pi}{4}$
- بالنسبة ل J : المعيار هو $|z_J| = 2\sqrt{2}$ العمدة هي $[2\pi]$ $\arg(z_J) \equiv \frac{-\pi}{4}$
- بالنسبة ل K : المعيار هو $|z_K| = 2$ العمدة هي $[2\pi]$ $\arg(z_K) \equiv \frac{-\pi}{2}$
- بالنسبة ل L : المعيار هو $|z_L| = 2$ العمدة هي $[2\pi]$ $\arg(z_L) \equiv 0$



04.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط حيث :

01. نحدد طبيعة المثلث ABC . $A_{(z_A=1+i\sqrt{3})}$ و $B_{(z_B=-1-i)}$ و $C_{(z_C=3-i)}$.

• لدينا : $AB = |z_B - z_A| = |-1-i - (1+i\sqrt{3})| = |-2 - (1+\sqrt{3})i| = \sqrt{4 + (1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8+2\sqrt{3}}$

• لدينا : $AC = |z_C - z_A| = |3-i - (1+i\sqrt{3})| = |2 - (1+\sqrt{3})i| = \sqrt{4 + (1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8+2\sqrt{3}}$

• لدينا : $BC = |z_C - z_B| = |3-i + 1+i| = |4| = 4$

و منه : $AB = AC$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين في A .

02. ننشئ النقط $A_{(z_A=-2+i)}$ و $B_{(z_B=4i)}$ و $C_{(z_C=\frac{7}{2}+2i)}$ و $D_{(z_D=\frac{3}{2}-i)}$

ثم نحدد طبيعة الرباعي $ABCD$.

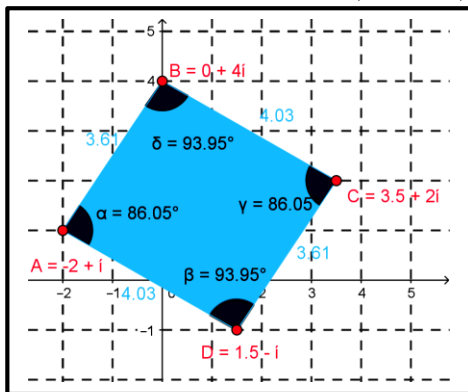
• لدينا : $AB = |z_B - z_A| = |4i - (-2+i)| = |-2+3i| = \sqrt{4+3^2} = \sqrt{13}$

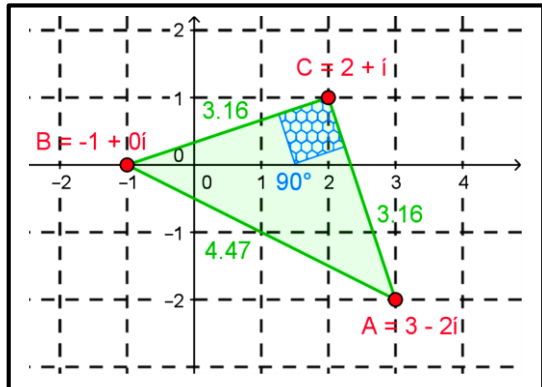
• لدينا : $DC = |z_C - z_D| = |\frac{7}{2}+2i - (\frac{3}{2}-i)| = |\frac{7}{2}-\frac{3}{2} + (2+1)i| = \sqrt{(2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

• لدينا : $BC = |z_C - z_B| = |\frac{7}{2}+2i - 4i| = |\frac{7}{2}-2i| = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}$

• لدينا : $AD = |z_D - z_A| = |\frac{3}{2}-i - (-2+i)| = |\frac{7}{2}-2i| = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{53}}{2}$

و منه : $BC = AD$ و $AB = DC$





خلاصة : الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

03. النقطة A و B و C ألحقها $3-2i$; -1 ; $2+i$ على التوالي .

أ- ننشئ النقط : A و B و C في المستوى العقدي .

ب- نبين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

• لدينا : $AB = |z_B - z_A| = |-1 - (3 - 2i)| = |-4 + 2i| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

• لدينا : $AC = |z_C - z_A| = |2 + i - (3 - 2i)| = |-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

• لدينا : $BC = |z_C - z_B| = |2 + i + 1| = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

ومنه : $AB^2 = CA^2 + CB^2$ و $CA = CB$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

05.

أحسب معيار الأعداد: 3 ; -2 ; $5i$; $-3i$; $2-i$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1-i\sqrt{3}$; $1+i$; $1-i$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; $(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$

لدينا :

• $|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ و $|2-i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ و $|-3i| = 3$ و $|5i| = 5$ و $|-2| = 2$ و $|3| = 3$

• و $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = 2$ و $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ و $|1-i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

و $\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3\right| = \frac{|1+i|^3}{|1-i|^3} = \left(\frac{|1+i|}{|1-i|}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3 = 1$ و $|(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)| = |1+i\sqrt{3}| |\sqrt{3}-i| = 2 \times 2 = 4$

06.

نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية:

01.

• $z_1 = 1+i = |z_1| \left(\frac{1}{|z_1|} + i \frac{1}{|z_1|} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$

• $z_2 = 1+i\sqrt{3} = |z_2| \left(\frac{1}{|z_2|} + i \frac{\sqrt{3}}{|z_2|} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[2; \frac{\pi}{3} \right]$

• $z_3 = 1-i\sqrt{3} = \overline{z_2} = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right]$

• $z_4 = 1-i = \overline{z_1} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$

• $z_5 = 7+7i = 7(1+i) = [7; 0] \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right] = \left[7\sqrt{2}; 0 + \frac{\pi}{4} \right] = \left[7\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$



$$z_6 = -8 - 8\sqrt{3}i = -8(1 + i\sqrt{3}) = -8z_2 = [8; \pi] \left[2; \frac{\pi}{3} \right] = \left[16; \pi + \frac{\pi}{3} \right] = \left[16; \frac{4\pi}{3} \right] = \left[16; -\frac{2\pi}{3} \right]$$

$$z_7 = 3 - 3i = 3(1 - i) = 3z_4 = [3; 0] \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right] = \left[3\sqrt{2}; 0 - \frac{\pi}{4} \right] = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_8 = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{[4, 0]}{\left[2; \frac{\pi}{3} \right]} = \left[\frac{4}{2}, 0 - \frac{\pi}{3} \right] = \left[2, -\frac{\pi}{3} \right] \text{ : نحسب}$$

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12} \right] \text{ : نحسب}$$

ثم سنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$ من خلال

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12} \right] \Leftrightarrow z_9 = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_9 = \frac{1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_9 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{(-1 + \sqrt{3})i}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \text{ و } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \text{ : ومنه}$$

$$\text{و بالتالي : } \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ و } \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ : خلاصة}$$

.07

.01 حدد المعيار و عمدة الأعداد العقدية التالية "

$$- \text{أ} \quad z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = a + bi \text{ لدينا } |z_1| = |\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2} \text{ و } \arg z_1 \equiv \alpha \text{ [} 2\pi \text{] مع}$$

$$\arg z_1 \equiv \alpha \equiv -\frac{\pi}{6} \text{ [} 2\pi \text{] و بالتالي } \alpha \equiv -\frac{\pi}{6} \text{ [} 2\pi \text{] : ومنه } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z_1|} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z_1|} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{خلاصة : معيار } |z_1| = 2\sqrt{2} \text{ و عمدة } \arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{6} \text{ [} 2\pi \text{]}$$



ب - $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = a + bi$ لدينا : $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg z_2 \equiv \alpha [2\pi]$ مع

و منه : $\alpha \equiv -\frac{3\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$ و بالتالي $\arg z_2 \equiv \alpha \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$ و $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z_2|} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z_2|} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

خلاصة : معيار $|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و عمدة $\arg z_2 \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$

ج - بالنسبة ل $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ نستعمل طريقة أخرى :

نلاحظ أن :

$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right]$$

خلاصة : معيار $|z_3| = 1$ و عمدة $\arg z_3 \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

د - بالنسبة ل $z_1 z_2$:

• بالنسبة للمعيار : $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

• بالنسبة للعمدة : $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \equiv -\frac{11\pi}{12} [2\pi]$

بالنسبة ل $\frac{z_1}{z_2}$:

• بالنسبة للمعيار : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4$

• بالنسبة للعمدة : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$

بالنسبة ل z_2^2 :

• بالنسبة للمعيار : $|z_2^2| = |z_2|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

• بالنسبة للعمدة : $\arg(z_2^2) \equiv 2 \times \arg(z_2) \equiv 2 \times -\frac{3\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

02 نحدد الشكل المثلثي و الشكل الأسّي ثم المعيار و عمدة لكل عدد عقدي من بين الأعداد العقدية التالية "

• $\arg(z_1) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ و $|z_1| = 3\sqrt{2}$ و منه : $z_1 = 3 - 3i = 3(1 - i) = [3; 0] \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$



$$\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ و } |z_1| = 3\sqrt{2} \text{ و منه } z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = [2; 0] \times \left[1; -\frac{\pi}{3} \right] = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right] = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$z_1 z_2 = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right] \left[2; -\frac{\pi}{3} \right] = \left[3\sqrt{2} \times 2; -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] = \left[6\sqrt{2}; -\frac{7\pi}{12} \right]$$

$$\text{و منه } |z_1| = 3\sqrt{2} \text{ و } = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \times 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 6\sqrt{2}e^{-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)i} = 6\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$$

$$\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \text{ و } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 4 \text{ و منه } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]}{\left[2; -\frac{\pi}{3} \right]} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right] = \left[4; \frac{\pi}{12} \right] = 4e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$z_2^3 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\pi}{4} \right]^3 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3; 3 \times \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{9\pi}{4} \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; -2\pi - \frac{\pi}{4} \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\pi}{4} \right] = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\arg(z_2^3) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ و } |z_2^3| = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ و منه :}$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \left[2; -\frac{\pi}{12} \right] = 2e^{-\frac{\pi}{12}i}$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \left[2; \frac{\pi}{12} \right]$$

$$z_5 = -2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-\pi i} \times e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \left[2; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_6 = \frac{2i}{1-i} = \frac{\left[2; \frac{\pi}{2} \right]}{\left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4} \right] = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

03 نعطي إخطا ل أ $\cos^3 x$ ب $\sin^4 x$ أ إخطا ل $\cos^3 x$

حسب صيغتي أولير formules d'Euler $\cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ و $\sin x = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ مع $z = [1; x] = \cos x + i \sin x$

أو أيضا : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ و $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ مع

طريقة 1 : نستعمل الكتابة $\cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

لا تنسى :

formule de Moivre صيغة موفر $z^n = [1; nx] = \cos nx + i \sin nx$



$$z^n \times \bar{z}^n = 1 \text{ و } z^n - \bar{z}^n = 2i \sin(nx) \text{ و } z^n + \bar{z}^n = 2\cos(nx) \quad \bullet$$

ومنه :

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 (z + \bar{z})^3 = \frac{1}{8} (z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3) \\ &= \frac{1}{8} (z^3 + \bar{z}^3 + 3z\bar{z}(z + \bar{z})) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 3 \times 1 \times 2\cos x) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6\cos x) \end{aligned}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6\cos x) \quad \text{خلاصة :}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{طريقة 2 : نستعمل الكتابة}$$

لا تنسى :

$$\bullet \quad (e^{ix})^n = e^{inx} \text{ و } \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} \text{ و } \frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)} \text{ و } e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

$$\bullet \quad e^{inx} \times e^{-inx} = 1 \text{ و } (e^{ix})^n - (e^{-ix})^n = 2i \sin(nx) \text{ و } (e^{ix})^n + (e^{-ix})^n = 2\cos(nx)$$

ومنه :

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 (e^{ix} + e^{-ix})^3 = \frac{1}{8} \left((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 \times e^{-ix} + 3e^{ix} \times (e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3x} + 3e^{i2x} \times e^{-ix} + 3e^{ix} \times e^{-i2x} + e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3x} + e^{-i3x} + 3e^{ix} \times e^{-ix} \times (e^{ix} + e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 3 \times 1 \times 2\cos x) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6\cos x) \end{aligned}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6\cos x) \quad \text{خلاصة :}$$

ب - إخطا ط ل $\sin^4 x$

$$\sin x = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{طريقة 1 : نستعمل الكتابة}$$

لا تنسى :

$$\bullet \quad \text{formule de Moivre صيغة موفر } z^n = [1; nx] = \cos nx + i \sin nx$$

$$\bullet \quad z^n \times \bar{z}^n = 1 \text{ و } z^n - \bar{z}^n = 2i \sin(nx) \text{ و } z^n + \bar{z}^n = 2\cos(nx)$$

ومنه :



$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^4 = \left(\frac{1}{2i} \right)^4 (z - \bar{z})^4 = \frac{1}{16} (z^4 - 4z^3\bar{z} + 6z^2\bar{z}^2 - 4z\bar{z}^3 + \bar{z}^4) \\ &= \frac{1}{16} (z^4 + \bar{z}^4 - 4z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) + 6z^2\bar{z}^2) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) - 4 \times 1 \times 2 \cos 2x + 6 \times 1) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos 4x - 8 \cos 2x + 6) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)\end{aligned}$$

خلاصة : $\sin^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$

طريقة 2 : نستعمل الكتابة $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

لا تنسى :

• $(e^{ix})^n = e^{inx}$ و $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$ و $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$ و $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$

• $(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n = 2\cos(nx)$ و $(e^{ix})^n - (e^{-ix})^n = 2i \sin(nx)$ و $e^{inx} \times e^{-inx} = 1$ ومنه :

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \left(\frac{1}{2i} \right)^4 (e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{1}{16} ((e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3 \times e^{-ix} + 6(e^{ix})^2 \times (e^{-ix})^2 - 4e^{ix} \times (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4) \\ &= \frac{1}{16} (e^{i4x} - 4e^{i3x} \times e^{-ix} + 6e^{i2x} \times e^{-i2x} - 4e^{ix} \times e^{-i3x} + e^{-i4x}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{i4x} + e^{-i4x} - 4e^{ix} \times e^{-ix} \times (e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6 \times 1) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) - 4 \times 1 \times 2 \cos 2x + 6) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos 4x - 8 \cos 2x + 6) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)\end{aligned}$$

خلاصة : $\sin^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$

01. نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية: $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$



• لدينا : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{6} \right]$

$$z_2 = 1 - i = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{6} \right]}{\left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \left[1; \frac{\pi}{12} \right]$$

خلاصة : $Z = \left[1; \frac{\pi}{12} \right]$

...02

1- نعطي الشكل الجبري ل: Z .

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - i)}{1 - i} = \sqrt{2} \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} i$$

خلاصة : الشكل الجبري ل: Z هو : $Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} i$

ب- استنتج قيمة كل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

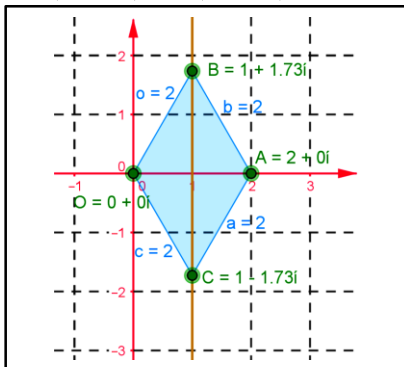
من خلال $Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} i$ و $Z = \left[1; \frac{\pi}{12} \right] = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

إذن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

خلاصة : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

...09

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (الوحدة 2 cm) نعتبر النقط $A(z_A=2)$ و $B(z_B=1+i\sqrt{3})$ و $C(z_C=1-i\sqrt{3})$



01. أ- نعطي الشكل المثلثي و الشكل الأسي Z_B ثم ل Z_C .

• $z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[2; \frac{\pi}{3} \right] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

• $z_C = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right] = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- ننشئ النقط A و B و C .

ج- نستنتج مبيانيا طبيعة الرباعي OBAC لدينا : OBAC معين .

02. نحدد ثم أنشئ (Δ) المجموعة النقط M_z من المستوى العقدي حيث : $|z| = |z - 2|$.



$$|z| = |z-2| \Leftrightarrow OM = AM \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow MO = MA$$

و منه : مجموعة النقط M هي واسط القطعة $[OA]$.

03... x و y من \mathbb{R} لكل النقطة M لحقها العدد العقدي $z = x + yi$ (مع $z \neq z_A$) نربطها بالنقطة M' التي لحقها z' حيث

$$z' = f(z) = \frac{-4}{z-2}$$

أ- نحل المعادلة : $f(z) = z$

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{-4}{z-2} = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow z-1 = i\sqrt{3} \text{ أو } z-1 = -i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ أو } z = 1 - i\sqrt{3}$$

خلاصة : حل المعادلة هما : $z = 1 + i\sqrt{3}$ أو $z = 1 - i\sqrt{3}$.

ب- نستنتج النقطتين التي تربط B و C .

النقطة B نربطها بنفسها إي صامدة نفس الشيء ل C .

ج- لتكن G' مركز ثقل المثلث OAB نربطها ب G' حدد ثم أنشئ النقطة G' .

$$\text{لدينا : لحق } G \text{ يحقق ما يلي : } Z_G = \frac{1}{3}(Z_O + Z_A + Z_B) = \frac{2+1-i\sqrt{3}}{3} = 1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{و منه : لحق } G' \text{ يحقق ما يلي } Z_{G'} = \frac{-4}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-2} = \frac{-12}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{-12(-3-i\sqrt{3})}{9+3} = 3+i\sqrt{3}$$

04...

$$\text{أ- نبين أن : } |z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|} \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-4-2z+4}{z-2} \right| = \frac{2|z|}{|z-2|} \Leftrightarrow \left| \frac{-2z}{z-2} \right| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

$$\text{خلاصة : } |z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

ب- نفترض أن : النقطة M تنتمي ل (Δ) نربطها بالنقطة M' . بين أن M' تنتمي لدائرة يتم تحديد مركزها و شعاعها.

لدينا : $|z| = |z-2|$ و $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$ و منه : $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|} = 2$ و منه M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة A التي لحقها

و شعاعها $R = 2$. خلاصة : $M' \in \mathcal{C}(A; 2)$