

مستوى : السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
• مسلك علوم الحياة و الأرض
• مسلك العلوم الفيزيائية
• مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 11 في درس الأعداد العقدية (ب)

القدرات المنتظرة

- التعرف على الصيغ المثلثية الأساسية باستعمال الأعداد العقدية
- إخطاط حدانيات مثلثية باستعمال الترميز الأسّي لعدد عقدي
- تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية

- حل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ في \mathbb{C} $((a; b; c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

محتوى الدرس

- المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة \mathbb{C}
- الترميز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم وخاصياته
- صيغتا أولير وتطبيقاتها
- صيغة موافر وتطبيقاتها

▪ إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما:

$$z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▪ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو:

$$z = -\frac{b}{2a}$$

▪ إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين

$$\text{هما: } z = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } z' = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال 1: لنحل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $(E): z^2 - z + 2 = 0$

ميز المعادلة (E) هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

حلا المعادلة (E) هما: $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ و $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{إذن: } S = \left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \right\}$$

مثال 2: لنحل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $(E): z^2 - z - 2 = 0$

ميز المعادلة (E) هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$$

حلا المعادلة (E) هما: $z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ و $z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

1. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة \mathbb{C}

1) المعادلة: $z^2 = a$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم حلا المعادلة. $z^2 = a$ في المجموعة \mathbb{C} هما:

▪ \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ إذا كان $a > 0$

▪ $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a < 0$

أمثلة: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات التالية: (1) $z^2 = 5$ (2) $z^2 = -3$

أجوبة: (1) $z^2 = 5$ يعني: $z = \sqrt{5}$ و $z = -\sqrt{5}$

ومنه: $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

(2) $z^2 = -3$ يعني $z = (\sqrt{3}i)^2$ و $z = -\sqrt{3}i$

ومنه: $S = \{-\sqrt{3}i; \sqrt{3}i\}$

2) المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم

تعريف: نسمي معادلة من الدرجة الثانية في المجموعة \mathbb{C} بمعاملات حقيقية كل معادلة تكتب على الشكل $az^2 + bz + c = 0$ حيث z هو المجهول، و a و b و c أعداد حقيقية، و a غير منعدم

خاصية: نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b و c أعداد حقيقية، و a غير منعدم

العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ ، يسمى مميز المعادلة

$az^2 + bz + c = 0$

$$S = \{-1; 2\} \text{ . إذن}$$

مثال 3: لنحل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $(E): z^2 - 2z + 1 = 0$

الجواب: مميز المعادلة (E) هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 = 0$$

للمعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ إذن:

$$S = \{1\}$$

(3) نتائج: ليكن z_1 و z_2 حلتي المعادلة

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ (في المجموعة } \mathbb{C}, a \neq 0 \text{): لدينا:}$$

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \text{ لكل } z \text{ من } \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ و } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

مثال: لكل z من \mathbb{C} , نضع: $P(z) = z^2 - 2z + 2$

$$1. \text{ أحسب } P(1-i)$$

$$2. \text{ استنتج حلول المعادلة } P(z) = 0$$

(الجواب: 1)

$$P(1-i) = (1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 = 0$$

وبالتالي: $z_1 = 1 - i$ جذر للحدودية العقدية $P(z)$

$$\text{ونعلم أن: إذن } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ أي } z_1 + z_2 = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\text{أي: } z_2 = 2 + i - 1 = 1 + i \text{ ومنه: } S = \{1 - i; 1 + i\}$$

تمرين 1: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلتين التاليتين:

$$(z^2 - 6z + 13 = 0) \text{ (2) } (z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0 \text{ (1)}$$

(الجواب: 1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$ يعني $z^2 - 4 = 0$ أو $z^2 + 9 = 0$

$$\text{يعني } z^2 = 4 \text{ أو } z^2 = -9 \text{ يعني } z = \sqrt{4} \text{ أو } z = -\sqrt{4} \text{ أو } z = \sqrt{9}i \text{ أو } z = -\sqrt{9}i$$

$$\text{يعني } z = 2 \text{ أو } z = -2 \text{ أو } z = 3i \text{ أو } z = -3i$$

$$\text{ومنه: } S = \{-3i; 3i; -2; 2\}$$

(2) مميز المعادلة هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(13) = 36 - 52 = (4i)^2$$

$$\text{حلا المعادلة } (E) \text{ هما: } z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i \text{ و } z_2 = \overline{z_1} = 3-2i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 3 - 2i$$

$$\text{إذن: } S = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$$

تمرين 2: حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة:

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

(2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} الحدودية

$$P(z) = z^2 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

أ. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

ب. حدد الأعداد الحقيقية $a; b; c$ حيث :

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

ج. حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

$$z^2 - 8z + 17 = 0 \text{ (أجوبة: 1)}$$

مميز المعادلة هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(17) = 64 - 68 = (2i)^2$$

$$\text{حلا المعادلة } (E) \text{ هما: } z_1 = \frac{8+2i}{2} = 4+i \text{ و } z_2 = \overline{z_1} = 4-i$$

$$\text{إذن: } S = \{4-i; 4+i\}$$

(2) أ) ليكن $z_0 = bi$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة.

$$\text{لدينا إذن: } z_0^3 + (-8+i)z_0^2 + (17-8i)z_0 + 17i = 0$$

$$\text{يعني: } (bi)^3 + (-8+i)(bi)^2 + (17-8i)(bi) + 17i = 0$$

$$\text{يعني: } -ib^3 - (-8+i)b^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$$

$$\text{يعني: } -ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$$

$$\text{يعني: } 8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$$

$$\begin{cases} 8b(b+1) = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases} \text{ يعني: } \begin{cases} 8b^2 + 8b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases} \text{ يعني:}$$

$$\begin{cases} b = 0 \text{ أو } b = -1 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases} \text{ يعني:}$$

$$b = 0 \text{ لا يحقق المعادلة الثانية لأن: } -0^3 - 0^2 + 17 \cdot 0 + 17 \neq 0$$

$$b = -1 \text{ يحقق المعادلة الثانية لأن:}$$

$$-(-1)^3 - (-1)^2 + 17(-1) + 17 = 0$$

$$\text{ومنه } b = -1 \text{ إذن: } z_0 = (-1)i = -i \text{ حل تخيلي صرف}$$

للمعادلة.

$$(z+i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ci \text{ (ب) (2)}$$

$$P(z) = az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci$$

$$\text{بالمقارنة مع } P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c-8i=17-8i \\ c=17 \end{cases} \text{ يعني: } \begin{cases} a=1 \\ b+ai=-8+i \\ c+bi=17-8i \\ ai=17i \end{cases} \text{ نجد أن:}$$

ومنه: $a=1$ و $b=-8$ و $c=17$ وبالتالي الكتابة الجديدة ل

$$P(z)$$

$$\text{هي: } P(z) = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$$

$$(z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0 \text{ يعني } P(z) = 0 \text{ (ج) (2)}$$

$$\text{يعني } z^2 - 8z + 17 = 0 \text{ أو } z + i = 0$$

$$\text{يعني } z_1 = 4+i \text{ أو } z_2 = 4-i \text{ أو } z_0 = -i$$

$$\text{وبالتالي: } S = \{4-i; 4+i; -i\}$$

تمرين 3: نعتبر في المجموعة \mathbb{C} , المعادلة:

$$(E): z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = 0$$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)

$$|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ لدينا: } z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

$$\text{اذن : } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه } z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4} - (-i\frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$$

III. صيغتا أولير

خاصية: ليكن θ عددا حقيقيا , لدينا: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

مثال 1: لنبين أن: $\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$ لكل θ من \mathbb{R}

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ اذن

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \text{ ومنه:}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left((e^{i\theta})^2 + 2e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2 \right) = \frac{1}{4} \left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos 2\theta + 2) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \end{aligned}$$

تمرين 5: بين أن: $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ لكل θ من \mathbb{R}

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا: $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ اذن

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \text{ ومنه:}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{1}{4} \left((e^{i\theta})^2 - 2e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2 \right) = \frac{1}{4} \left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} - 2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} (2 \cos 2\theta - 2) = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

ملحوظة: لكل n من \mathbb{N} و θ من \mathbb{R} لدينا:

$$e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i \sin(n\theta) \text{ و } e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$$

تمرين 6: بين أن: $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$ لكل θ من \mathbb{R}

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ اذن

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

2. بين أن لكل z من \mathbb{C} , لدينا:

$$z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$$

3. حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

أجوبة: (1)

$$\begin{aligned} 2^3 + 2(\sqrt{3}-1)2^2 + 4(1-\sqrt{3})2 - 8 &= 8 + 8(\sqrt{3}-1) + 8(1-\sqrt{3}) - 8 \\ &= 8 + 8\sqrt{3} - 8 + 8 - 8\sqrt{3} - 8 = 0 \end{aligned}$$

ومنه : العدد 2 حل للمعادلة (E)

$$\begin{aligned} (z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) &= z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 4z - 2z^2 - 4\sqrt{3}z - 8 \\ &= z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 \end{aligned}$$

$$(z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) = 0 \text{ يعني } P(z) = 0 \quad (3)$$

يعني $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ أو $z - 2 = 0$

يعني $z = 2$ أو $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

نحل المعادلة: $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

مميز المعادلة هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(4) = 12 - 16 = (2i)^2$$

حلا المعادلة $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$$\text{هما: } z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} - i \text{ و } z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$

إذن: مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i; 2\}$

II. الترميز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم

تعريف: كل عدد عقدي z غير منعدم, معياره r و θ عمدة له

يكتب على الشكل $re^{i\theta}$ هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي z

مثال: ليكن: $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, لدينا: $|z| = 2$ و $\arg z = \frac{\pi}{4}$ [2π]

إذن $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي ترميز أسّي للعدد العقدي z

خاصيات: ليكن r و r' عددين حقيقيين موجبين قطاعا و θ و θ' عددين حقيقيين

$$(1) \quad re^{i\theta} = re^{-i(\theta+\pi)} \quad (2) \quad -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$$

$$(3) \quad re^{i\theta} \times r'e^{i\theta} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(4) \quad \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad (5) \quad \frac{r'e^{i\theta}}{re^{i\theta}} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(6) \quad (re^{i\theta})^n = (r)^n re^{in\theta}$$

مثال أو تمرين 4: أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

$$(1) \quad z_1 = 2 + 2i \quad (2) \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad (3) \quad z_1 \times z_2$$

$$(4) \quad \frac{z_1}{z_2} \quad (5) \quad (z_2)^{12}$$

أجوبة: (1) لدينا: $z_1 = 2 + 2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ومنه: $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

و منه:

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

و منه:

$$\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \quad \text{إذن:}$$

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad \text{و (حسب خاصية تساوي$$

عددين عقديين)

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

تمرين 10: حل في \mathbb{C} -1 $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$

$$3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

الأجوبة: 1- حل المعادلة: $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$

$$\text{لدينا: } \Delta = -36 \quad z_1 = \frac{2 - i\sqrt{36}}{4}; \quad z_2 = \frac{2 + i\sqrt{36}}{4}$$

$$\text{إذن: } S = \left\{ \frac{1-3i}{2}; \frac{1+3i}{2} \right\}$$

$$-2 \quad 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

نلاحظ أن: 1 **يعدم** $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$

و منه: $z - 1$ **يقسم** $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$

$$\text{نجد: } 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = (Z-1)(3Z^2 + 2)$$

حل المعادلة: $3Z^2 + 2 = 0$

$$Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{أو} \quad Z = i\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{إذن: } Z^2 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{و منه: } 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

$$\text{يعني: } Z = 1 \quad \text{أو} \quad Z = i\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{أو} \quad Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{إذن: } S = \left\{ 1; i\sqrt{\frac{2}{3}}; -i\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

تمرين 11: $P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i$

(1) بين أن $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا z_0 يجب تحديده

(2) **حل في \mathbb{C} :** $P(Z) = 0$

الأجوبة: 1 لنبين أن $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا

نعتبر: $z_0 = ib$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 - (16-i)(ib)^2 + (89-16i)ib + 89i = 0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 + 16b + i(-b^3 - b^2 + 89b + 89) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 + 16b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 89b + 89 = 0 \end{cases}$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow b = -1$$

و منه: $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا $z_0 = -i$

(2) **حل المعادلة $P(Z) = 0$ في \mathbb{C} :**

بما أن: $-i$ **جدر ل** $P(Z)$ **فإن:**

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta})$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} \left((e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right)$$

$$= \frac{1}{8} (2 \cos 3\theta + 3 \times 2 \cos \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

تمرين 7: بين أن: $\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$ لكل θ من \mathbb{R}

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا: $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ إذن

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \quad \text{و منه:}$$

$$\sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{8i} \left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{8i} (e^{i3\theta} - 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} - e^{-i3\theta})$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{8i} \left((e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right)$$

$$= -\frac{1}{8i} (2i \sin 3\theta - 3 \times 2i \sin \theta) = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

تمرين 8: بين أن: $\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

لكل θ من \mathbb{R}

IV. صيغة موافر

خاصية: ليكن θ عددا حقيقيا و n عنصرا من \mathbb{N} لدينا:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

هذه المتساوية تسمى صيغة موافر، و تكتب أيضا: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

مثال 1: لنبين أن: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{لكل } \theta \text{ من } \mathbb{R}$$

الجواب: لدينا حسب صيغة موافر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

و لدينا أيضا:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \quad \text{و منه:}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{و} \quad \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

(حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

تمرين 9: بين باستعمال صيغة موافر أن:

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad \text{لكل } \theta \text{ من } \mathbb{R}$$

$$\text{و أن: } \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \text{لكل } \theta \text{ من } \mathbb{R}$$

الجواب: لدينا حسب صيغة موافر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

و لدينا أيضا:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3(\cos \theta)^2 i \sin \theta + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3$$

$$P(Z) = (z+i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$P(Z) = z^3 + (i + \alpha)z^2 + (\alpha i + \beta)z + \beta i$$

$$P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i \quad \text{و بما أن :}$$

$$\beta = 89 \quad \text{و} \quad \alpha = -16$$

$$P(Z) = (z+i)(z^2 - 16z + 89) \quad \text{و منه :}$$

$$z^2 - 16z + 89 = 0 \quad \text{حل المعادلة :}$$

$$\Delta = -100 \quad \text{ومنه} \quad z = 8 - 5i \quad \text{او} \quad z = 8 + 5i$$

$$S = \{-i; 8 - 5i; 8 + 5i\} \quad \text{هي : المعادلة (E) هي}$$

$$z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \quad \text{نعتبر : 12 تمرين}$$

(1) أ) حدد الشكل الأسى ل z ب) حدد الشكل الجبري ل z

$$(2) \quad \sin \frac{11\pi}{12} \quad \text{و} \quad \cos \frac{11\pi}{12}$$

$$z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \quad \text{الأجوبة: (1) أ) تحديد الشكل الأسى :}$$

$$z = e^{-i\pi} \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{i\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \pi} = e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

ب) تحديد الشكل الجبري:

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$z = \frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

$$(2) \quad \sin \frac{-11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} \quad \text{و} \quad \cos \frac{-11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \quad \text{من أ) و ب) :}$$

$$\sin \frac{11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \quad \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \quad \text{إذن}$$