

الأعداد العقدية

ع 2

تعريف : (المرافق)

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا حيث x و y عددا حقيقيان .
العدد العقدي $x - iy$ يسمى مرافق العدد العقدي z ويرمز له بالرمز \bar{z}

خاصية : (المرافق والعمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين .

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} .$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} .$$

$$(z_2 \neq 0) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} .$$

$$z \in C^* \text{ و } n \in Z \text{ حيث } \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$



تعريف : (المعيار)

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا مع $(a, b) \in R^2$

العدد الحقيقي $\sqrt{a^2 + b^2}$ يسمى معيار العدد z ونرمز له بالرمز $|z|$

ملاحظة :

ليكن z عدد عقديا و M صورته في المستوى العقدي : لدينا $OM = |z|$

لتكن A و B نقطتين احاطها على التوالي z_A و z_B لدينا: $AB = |z_B - z_A|$

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} .$$

خاصية : (المعيار والعمليات)

$$\left| z_1 \times z_2 \right| = \left| z_1 \right| \times \left| z_2 \right| , \quad z_2 \neq 0 \quad \text{حيث} \quad \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| .$$

$$\left| z_1 + z_2 \right| \leq \left| z_1 \right| + \left| z_2 \right| .$$

$$z \in C^* \text{ و } n \in Z \text{ حيث } |z^n| = |z|^n .$$

تعريف : (العمدة)

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M صورته $(O \neq M)$

المتجهتان \vec{e}_1 و \vec{OM} الغير منعدمتين تحددان زاوية موجبة

كل قياس للزاوية (\vec{e}_1, \vec{OM}) نسميه عمدة العدد z ونرمز له

ب $\arg(z)$

$$\text{ولدينا } \arg(z) \equiv (\vec{e}_1, \vec{OM}) [2\pi]$$

خاصية : (العمدة و العمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

$$\arg(\bar{z}_1) \equiv -\arg(z_1) [2\pi] .$$

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi] .$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi] .$$

$$z \in C^* \text{ و } n \in Z \text{ حيث } \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi] .$$

1. مجموعة الأعداد العقدية :

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز C و تحقق :

$$R \subset C .$$

العمليات الجبرية في C هي امتداد للعمليات في R .

تحتوي على عدد غير حقيقي يكتب i وبحق $i^2 = -1$.

كل عنصر z من C يكتب بكيفية وحيدة على شكل :

$$z = a + ib \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ من } R .$$

مصطلحات :

كل عنصر من C يسمى عدد عقدي .

المجموعة C تسمى مجموعة الأعداد العقدية .

الكتابة $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z .

العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ورمزه $a = \text{Re}(z)$.

العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ورمزه $b = \text{Im}(z)$.

خاصية : (الشكل الجبري والعمليات في مجموعة الأعداد العقدية :

ليكن a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 .$$

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} .$$

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) .$$

$$(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) .$$

2. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى المزود بمعلم M م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ يسمى المستوى العقدي

تعريف : (اللحن و الصورة)

نعبر عددا عقديا $z = a + ib$ حيث $(a, b) \in R^2$.

النقطة $M(a, b)$ تسمى صورة العدد z ونرمز لها بالرمز $M(z)$.

العدد العقدي $z = a + ib$ يسمى لحن $M(a, b)$ ويكتب z_M .

المتجهة $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ تسمى المتجهة الصورة للعدد z ونرمز لها

بالرمز $\vec{u}(z)$.

العدد العقدي $z = a + ib$ يسمى لحن المتجهة \vec{u} ونرمز له ب z_u .

خاصية : (اللحن و العمليات)

لحن نقطة M هو لحن المتجهة \vec{OM} .

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A .$$

$$z_{\vec{u+v}} = z_u + z_v .$$

$$z_u = z_v \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v} .$$

لحن المتجهة \vec{u} هو αz_u



الأعداد العقدية

2 ع ت

خاصية: (قياس الزوايا)

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى الحاقها على التوالي :

$$z_D \text{ و } z_C \text{ و } z_B \text{ و } z_A$$

$$O \neq A \text{ حيث } (\vec{e}_1, \vec{OA}) \equiv \arg(z_A) [2\pi].$$

$$A \neq B \text{ حيث } (\vec{e}_1, \vec{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

$$A \neq C \text{ و } A \neq B \text{ حيث } (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

$$D \neq C \text{ و } A \neq B \text{ حيث } (\vec{AB}, \vec{DC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

3. الشكل المثلثي :

خاصية : (الشكل المثلثي)

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ حيث } |z| = r \text{ و } \arg(z) \equiv \theta [2\pi].$$

نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل المثلثي.

ترميز :

$$\text{نرمز أيضا للكتابة } z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ بالرمز } [r, \theta].$$

خاصية : (العلاقة بين الشكل الجبري والشكل المثلثي)

$$z = a + ib = [r, \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

خاصية : (الشكل المثلثي و العمليات)

ليكن r و r' عددين حقيقيين موجبين قطعاً و θ و θ' عددين حقيقيين

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] \text{ و } [r, \theta] = [r, -\theta].$$

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'].$$

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right].$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta] \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}.$$

خاصية : (صيغة موافر)

لكل n من \mathbb{N} و θ من \mathbb{R} لدينا :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

4. الترميز الاسي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف : (الرمز $e^{i\theta}$)لكل عدد حقيقي θ نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ للعدد العقدي $[\cos\theta + i\sin\theta]$.

خاصية : (الترميز الاسي و العمليات)

ليكن α و θ عددين حقيقيين

$$e^{i\theta} e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ حيث } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}.$$

خاصية : (الترميز الاسي لعدد عقدي)

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل : $z = re^{i\theta}$ حيث

$$|z| = r \text{ و } \arg(z) \equiv \theta [2\pi]$$

نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل الاسي.

تعريف : (صيغتا اولير)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ لكل عدد حقيقي } \theta \text{ الصيغتان:}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ و}$$

تسميان صيغتا اولير

5. المعادلات من الدرجة الثانية :

خاصية : (المعادلات من الدرجة الثانية)

 S مجموعة حلول المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.ميز المعادلة $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \text{ اذا كان } \Delta > 0 \text{ فان .}$$

$$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \text{ اذا كان } \Delta = 0 \text{ فان .}$$

$$S = \left\{ \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\} \text{ اذا كان } \Delta < 0 \text{ فان .}$$

خاصية : (العلاقة بين المعاملات و الجذور)

ليكن z_1 و z_2 حلي للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ لدينا}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$



الأعداد العقدية

2 ع ت

الكتابة العقدية للنقطة z الذي مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبته k هي :

$$z' = k(z - \omega) + \omega$$

الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ هي :

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

علاقات في الحساب المثلثي:

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$

$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$

$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

x بالراديان	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	غير معرف
$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	-1	0	0
2π	1	0	0

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\tan(x + 2\pi) = \tan x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

6. تطبيقات هندسية للأعداد العقدية :

خاصية : (الاستقامية - التوازي - التعامد - التداور)

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة منى منى .

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \text{ تكون } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمة اذا فقط اذا كان}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } (AB) \parallel (DC) .$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \text{ } [\pi] \text{ يكافئ}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \text{ يكافئ } (AB) \perp (DC) .$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi] \text{ يكافئ}$$

$$\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}, \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \in \mathbb{R} \text{ النقطة } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ و } D \text{ متداورة يكافئ}$$

خاصية : ... طبيعة مثلث



$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R} \text{ يكافئ } \angle A \text{ قائم الزاوية في } \triangle ABC .$$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ يكافئ } \angle A \text{ قائم الزاوية في } \triangle ABC .$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i \text{ يكافئ } \angle A \text{ قائم الزاوية في } \triangle ABC .$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3}\right] \text{ يكافئ } \triangle ABC \text{ متساوي الأضلاع}$$

خاصية : ... طبيعة رباعي

$$z_B - z_A = z_C - z_D \text{ يكافئ } ABCD \text{ متوازي الأضلاع}$$

$$(AB) \perp (AD) \text{ يكافئ } ABCD \text{ مستطيل}$$

$$(AC) \perp (BD) \text{ يكافئ } ABCD \text{ متوازي الأضلاع}$$

$$AB = AC \text{ يكافئ } ABCD \text{ مستطيل و } \triangle ABC \text{ متساوي الأضلاع}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \pm i \text{ و } z_B - z_A = z_C - z_D \text{ يكافئ}$$

خاصية : ... التحويلات الإعتيادية

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$.

الكتابة العقدية للإزاحة ذات المتجهة \vec{u} هي : $z' = z + z_u$