ذ. محمد الكيال

الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية هي : $\mathbb{C}=\left\{z=a+ib\,/\,(a;b)\in\mathbb{R}^2 \text{ و } i^2=-1\right\}$

الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

- $a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\operatorname{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\operatorname{Im}(z)$

حالتان خاصتان:

- إذا كان : $\operatorname{Im}(z)=0$ فإن z هو عدد حقيقي
- إذا كان : $\operatorname{Re}(z)=0$ و $\operatorname{Im}(z)\neq 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

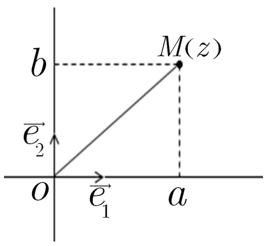
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$z=z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=\operatorname{Re}(z')$ و $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(z')$

التمثيل المبياني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

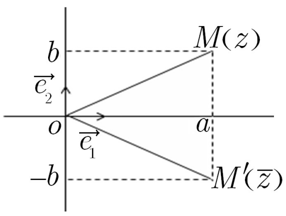
نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب : $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب : $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z=Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$

مرافق عدد عقدي:

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي : $\overline{z}=a-ib$

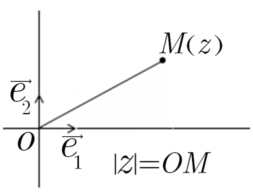


$M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n \quad (n\in\mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z'\neq 0)$

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \overline{z}=z$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \overline{z}=-z$
- $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$
- $z\overline{z}=[\operatorname{Re}(z)]^2+[\operatorname{Im}(z)]^2$

معيار عدد عقدي:



ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$
$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\lvert \overline{z} \rvert = \lvert z \rvert$
$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert} \quad (z' \neq 0)$	$\left\lvert \frac{1}{z'} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z' \rvert}$

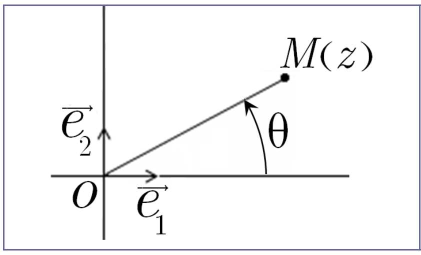
الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة : $\left(\overrightarrow{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز : $\arg z$

ونكتب : $\arg z = \theta\,[2\pi]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = \lvert z \rvert$ و $\arg z = \theta\,[2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
- الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي : $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a < 0$	$a > 0$
$a = [-a, \pi]$	$a = [a, 0]$
$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$

• $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$	• $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr';\theta+\theta']$	• $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
• $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$	• $\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$	• $\arg \overline{z} \equiv -\arg z\,[2\pi]$
• $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$	• $-[r,\theta] = [r,\pi+\theta]$	• $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
• $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$	• $[r,\theta]^n = [r^n; n\theta]$	• $\arg z^n \equiv n \arg z \;\; [2\pi]$
• $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$	• $\frac{1}{[r';\theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$	• $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \;\; [2\pi]$
• $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$	• $\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	• $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') \;\; [2\pi]$

• z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg z = k\pi$ • z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$

صيغة موافر:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

صيغتا أولير:

$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

و $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

حل المعادلة $z^2 = a$ $\quad z \in \mathbb{C}$ حيث $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة :		مجموعة حلول المعادلة :
$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$	$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ حيث $z\in\mathbb{C}$ و a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z\in\mathbb{C}\quad az^2+bz+c=0$ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$	$\Delta>0$	$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة AB	$AB=\left\|z_B-z_A\right\|$
I منتصف القطعة $[A;B]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$	$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A و B و C نقط مستقيمية	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A و B و C و D نقط متداورة	$\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\times\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$ أو $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\times\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$\left\|z-z_A\right\|=r$ $(r>0)$	• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$\left\|z-z_A\right\|=\left\|z-z_B\right\|$	• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

تمثيلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل	تمثيله العقدي هو:
الإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}$	$z'=z+b$ حيث b لحق المتجهة $\vec{u}$
التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k	$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω
الدوران r الذي مركزه Ω و زاويته θ	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω