

تمرين 13: بين أن: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ و

$$\mathbb{R} \text{ لكل } \theta \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

تمرين 14: بين باستعمال صيغة موافر أن:

$$\mathbb{R} \text{ لكل } \theta \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

و أن: $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ لكل θ من \mathbb{R}

تمرين 15: حل في \mathbb{C} : $1 - 2Z^2 - 2Z + 5 = 0$

$$3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

تمرين 16: $P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i$

(1) بين أن $P(Z) = 0$ (E) تقبل حلا تخيلا صرفا z_0 يجب تحديده

(2) حل في \mathbb{C} : $P(Z) = 0$

تمرين 17: نعتبر: $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

(1) حدد الشكل الأسى ل z (ب) حدد الشكل الجبري ل z

(2) استنتج $\cos \frac{11\pi}{12}$ و $\sin \frac{11\pi}{12}$

تمرين 18: (I) حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 8z + 17 = 0$.

(2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} الحدودية

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيلا صرفا وحيدا

b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث:

$$P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$$

c. حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

(II) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C

التي أحاقها على التوالي هي:

$$z_A = 4+i; \quad z_B = 4-i; \quad z_C = -i$$

1. مثل النقط A و B و C .

2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2

نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حدد لحق النقطة S .

3. بين أن النقط A و B و S و C تنتمي إلى

نفس دائرة (Γ) ينبغي تحديد مركزها و شعاعها

أرسم (Γ) .

تمرين 1: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات التالية: (1) $z^2 = 5$ (2)

$$z^2 = -3 \quad (3) \quad z^2 = -4$$

تمرين 2: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات التالية:

$$(1) \quad z^2 - z + 2 = 0$$

$$(2) \quad z^2 - z - 2 = 0$$

$$(3) \quad z^2 - 2z + 1 = 0$$

تمرين 3: لكل z من \mathbb{C} , نضع: $P(z) = z^2 - 2z + 2$

1. أحسب $P(1-i)$

2. استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

تمرين 4: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلتين التاليتين:

$$(1) \quad z^2 - 6z + 13 = 0 \quad (2) \quad (z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$$

تمرين 5: نعتبر في المجموعة \mathbb{C} , المعادلة:

$$(E): \quad z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = 0$$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)

2. بين أن لكل z من \mathbb{C} , لدينا:

$$z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$$

3. حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

تمرين 6: حدد الترميز الأسى للعدد العقدي $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

الجواب: ليكن: لدينا: $|z| = 2$ و $\arg z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ إذن

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

تمرين 7: أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

$$(1) \quad z_1 = 2 + 2i \quad (2) \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad (3) \quad z_1 \times z_2$$

$$(4) \quad \frac{z_1}{z_2} \quad (5) \quad (z_2)^{12}$$

تمرين 8: بين أن: $\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$ لكل θ من \mathbb{R}

تمرين 9: بين أن: $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ لكل θ من \mathbb{R}

تمرين 10: بين أن: $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$ لكل θ من \mathbb{R}

تمرين 11: بين أن: $\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$ لكل θ من \mathbb{R}

تمرين 12: بين أن: $\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

لكل θ من \mathbb{R}

تمرين 19: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين أحقاها على التوالي هما: $z_A = i$; $z_B = 2$

I. (1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$.

(2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

(3) مثل النقط A و B و B' .

II. نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z' = (1+i)z+1$.

(1) حدد A' و B' صورتين النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

(2) أ- بين أنه $\frac{z'-z}{i-z} = -i$ لكل z مخالف للعدد i .

ب- بين أن: $\left\{ \begin{array}{l} MM' = MA \\ \overline{(MA, MM')} = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$ لكل نقطة M

مخالفة للنقط A .

ج- استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M حيث $M \neq A$.

(3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث: $|z-2| = \sqrt{2}$.

(4) أ- بين أن: $(1+i)(z-2) = z'-3-2i$ لكل عدد عقدي z .

ب- استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها.

تمرين 20: المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط $I; A; B$ التي أحقاها على التوالي هي $1-2i; 1+2i; -2$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

(1) أنشئ النقط $I; A; B$.

(2) حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) . احسب شعاع الدائرة (C) .

(3) لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C) .

(4) لتكن E ، النقطة ذات اللحق z_E ، التي تنتمي

للدائرة (C) و التي تحقق $[\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}] = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

(5) أ- حدد معيار و عمدة العدد $z_E + \frac{1}{2}$.

ب- استنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

تمرين 21: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E اللتي أحقاها على التوالي هي: $z_A = 1-i$ و $z_B = 3+i$ و $z_C = -3$ و $z_D = 2$ و $z_E = -4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z' = (1+i)z+1$.

(1) حدد A' و B' صورتين النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

(2) أ- بين أن $OMEM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان $z^2 - 3z + 3 = 0$.

ب- حل في المجموعة C المعادلة $z^2 - 3z + 3 = 0$.

(3) أ- عبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$.

ب- استنتج أن $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم عبر $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج- بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و شعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة M بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها.

تمرين 22:

(1) حل في C المعادلة (E) : $z^2 + z + 1 = 0$.

(2) نعتبر في C المعادلة (F) : $z^2 = \bar{z}$.

أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z=0$ أو $|z|=1$.

ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة: $z^3 = 1$ أو $z=0$.

(3) حل المعادلة (F) في C .

تمرين 23: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد

ممنظم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط:

- النقطة A ذات اللحق $a = 7 - i\sqrt{3}$.

- النقطة B ذات اللحق $b = 5 + 3i\sqrt{3}$.

- النقطة Q منتصف القطعة $[OB]$.

(1) أ- ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد

الكتابة العقدية للدوران R .

ب- بين أن $R(A) = B$ ثم استنتج طبيعة أن المثلث

OAB .

(2) حدد q لحق النقطة Q .

(3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون $ABQK$ متوازي الأضلاع.

ج - علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

(3) أ - حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللق z حيث $z \in i\mathbb{R}$.

ب - لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d = \frac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي D النقطة ذات اللق d .

حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{d-1}{d+2}$ ثم استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج - ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi, \pi]$. نضع

$f = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\theta}$ و نسمي F النقطة ذات اللق f .

* بين أن العدد $U = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $U = \frac{f-1}{f+2}$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



(4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

(5) لتكن C النقطة ذات اللق $c = \frac{2a}{3}$ ؟
أ - أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.

ب - ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟
تمرين 24: (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين :

أ - $z^4 = 1$ (يمكن ملاحظة أن $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = z^4 - 1$)

ب - $1 = \left(\frac{z - i}{z + i} \right)^4$

(2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و ليكن A عددا عقديا .

نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z :

$A = \left(\frac{z - i}{z + i} \right)^n$ (E) .

P و Q و M هي النقط ذات الألقاق i و $-i$ و z على التوالي .

أ - بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E)

فإن $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$

ب - بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن $|A| = 1$.

ج - استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع حلولها حقيقية .

تمرين 25: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتان

لحاقهما على التوالي هما : $z_A = 1$; $z_B = -2$.
نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعروف

ب : $Z = \frac{z - 1}{z + 2}$

(1) حدد مجموعة النقط M ذات اللق z في كل من الحالتين التاليتين :

أ - $|Z| = 1$ ب - $Z \in \mathbb{R}$

(2) أ - بين أنه لكل z مخالف ل -2 لدينا :

$(z + 2)(Z - 1) = -3$

ب - نعتبر النقطة M ذات اللق z و النقطة M' التي لحقها Z .

بين أن : $M' \neq A$ ثم حدد $AM' \times BM$ و

$(\vec{u}, \overline{AM'}) + (\vec{u}, \overline{BM})$.