

الجواب : (1)

$$P(1-i) = (1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 = 0$$

وبالتالي : $z_1 = 1 - i$ جذر للحدودية العقدية $P(z)$

$$1 - i + z_2 = -\frac{-2}{1} \text{ أي } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{أي : } z_2 = 2 + i - 1 = 1 + i \text{ ومنه : } S = \{1 - i; 1 + i\}$$

تمرين 4 : حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلتين التاليتين:

$$(1) \quad z^2 - 6z + 13 = 0 \quad (2) \quad (z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$$

$$\text{الجواب : (1)} \quad (z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0 \text{ يعني } z^2 - 4 = 0 \text{ أو}$$

$$z^2 + 9 = 0$$

$$\text{يعني } z^2 = 4 \text{ أو } z^2 = -9 \text{ يعني } z = \sqrt{4} \text{ أو } z = -\sqrt{4} \text{ أو } z = \sqrt{9}i \text{ أو } z = -\sqrt{9}i$$

$$z = -\sqrt{9}i$$

$$\text{يعني } z = 2 \text{ أو } z = -2 \text{ أو } z = 3i \text{ أو } z = -3i$$

$$\text{ومنه : } S = \{-3i; 3i; -2; 2\}$$

(2) مميز المعادلة هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(13) = 36 - 52 = (4i)^2$$

$$\text{حلا المعادلة (E) هما : } z_1 = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i \text{ و}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 3 - 2i$$

$$\text{إذن : } S = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$$

تمرين 5: (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة :

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

(2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} الحدودية

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

أ. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

ب. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث :

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

ج. حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$

$$\text{أجوبة : (1)} \quad z^2 - 8z + 17 = 0$$

مميز المعادلة هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(17) = 64 - 68 = (2i)^2$$

$$\text{حلا المعادلة (E) هما : } z_1 = \frac{8 + 2i}{2} = 4 + i \text{ و}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 4 - i$$

$$\text{إذن : } S = \{4 - i; 4 + i\}$$

تمرين 1: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات التالية: (1) $z^2 = 5$ (2)

$$z^2 = -3 \quad (3) \quad z^2 = -4$$

$$\text{أجوبة : (1)} \quad z^2 = 5 \text{ يعني } z = \sqrt{5} \text{ و } z = -\sqrt{5}$$

$$\text{ومنه : } S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

$$(2) \quad z^2 = -4 \text{ يعني } z^2 = (2i)^2 \text{ يعني } z = 2i \text{ و } z = -2i$$

$$\text{ومنه : } S = \{-2i; 2i\}$$

$$(3) \quad z^2 = -3 \text{ يعني } z^2 = (\sqrt{3}i)^2 \text{ يعني } z = \sqrt{3}i \text{ و } z = -\sqrt{3}i$$

$$\text{ومنه : } S = \{-\sqrt{3}i; \sqrt{3}i\}$$

تمرين 2: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات التالية :

$$(1) \quad z^2 - z + 2 = 0$$

$$(2) \quad z^2 - z - 2 = 0$$

$$(3) \quad z^2 - 2z + 1 = 0$$

أجوبة (1): مميز المعادلة هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

$$\text{حلا المعادلة هما : } z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ و}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{إذن : } S = \left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \right\}$$

(2) مميز المعادلة هو :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$$

$$\text{حلا المعادلة هما : } z_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ و } z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\text{إذن : } S = \{-1; 2\}$$

(3) مميز المعادلة هو : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 = 0$

$$\text{للمعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو : } z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ إذن :}$$

$$S = \{1\}$$

تمرين 3: لكل z من \mathbb{C} , نضع : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

$$1. \text{ أحسب } P(1-i)$$

$$2. \text{ استنتج حلول المعادلة } P(z) = 0$$

(2) ليكن $z_0 = bi$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة.

لدينا اذن : $z_0^3 + (-8+i)z_0^2 + (17-8i)z_0 + 17i = 0$

يعني : $(bi)^3 + (-8+i)(bi)^2 + (17-8i)(bi) + 17i = 0$

يعني : $-ib^3 - (-8+i)b^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

يعني : $-ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

يعني : $8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$

يعني : $\begin{cases} 8b(b+1) = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$ يعني

يعني : $\begin{cases} b = 0 \text{ ou } b = -1 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$

$b = 0$ لا يحقق المعادلة الثانية لأن : $-0^3 - 0^2 + 17 \cdot 0 + 17 \neq 0$

$b = -1$ يحقق المعادلة الثانية لأن :

$-(-1)^3 - (-1)^2 + 17(-1) + 17 = 0$

ومنه $b = -1$ اذن : $z_0 = (-1)i = -i$ حل تخيلي صرف

للمعادلة.

(2) $(z+i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ci$

$P(z) = az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci$

بالمقارنة مع $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

نجد أن : $\begin{cases} a=1 \\ b+ai = -8+i \\ c+bi = 17-8i \\ ai = 17i \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c-8i = 17-8i \\ c=17 \end{cases}$

ومنه : $a=1$ و $b=-8$ و $c=17$ وبالتالي الكتابة الجديدة ل

$P(z)$

هي : $P(z) = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

(2) $P(z) = 0$ يعني $(z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$ (ج)

يعني $z^2 - 8z + 17 = 0$ أو $z+i = 0$

يعني $z_1 = 4+i$ أو $z_2 = 4-i$ أو $z_0 = -i$

وبالتالي : $S = \{4-i; 4+i; -i\}$

تمرين 6: نعتبر في المجموعة \mathbb{C} , المعادلة:

(E) : $z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = 0$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)

2. بين أن لكل z من \mathbb{C} , لدينا:

$z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8 = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$

3. حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

أجوبة : (1)

$2^3 + 2(\sqrt{3}-1)2^2 + 4(1-\sqrt{3})2 - 8 = 8 + 8(\sqrt{3}-1) + 8(1-\sqrt{3}) - 8$

$= 8 + 8\sqrt{3} - 8 + 8 - 8\sqrt{3} - 8 = 0$

ومنه : العدد 2 حل للمعادلة (E)

(2) $(z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) = z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 4z - 2z^2 - 4\sqrt{3}z - 8$

$= z^3 + 2(\sqrt{3}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{3})z - 8$

(3) $P(z) = 0$ يعني $(z-2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

يعني $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ أو $z-2 = 0$

يعني $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ أو $z = 2$

نحل المعادلة : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

مميز المعادلة هو :

$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(4) = 12 - 16 = (2i)^2$

حلا المعادلة $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

هما : $z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$

اذن : مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{\sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i; 2\}$

تمرين 7: حدد الترميز الأسّي للعدد العقدي $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

الجواب : ليكن : لدينا : $|z| = 2$ و $\arg z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ اذن

$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هو الترميز الأسّي للعدد العقدي z

تمرين 8: أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

(1) $z_1 = 2 + 2i$ (2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ (3) $z_1 \times z_2$

(4) $\frac{z_1}{z_2}$ (5) $(z_2)^{12}$

أجوبة : (1) لدينا : $z_1 = 2 + 2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

ومنه : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(2) لدينا : $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

اذن : $z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$ ومنه : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

(3) $z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

(4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4} - (-i\frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

(5) $(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$

تمرين 9: بين أن : $\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$ لكل θ من \mathbb{R}

الجواب : لدينا حسب صيغ أولير : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ و

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$

و منه:

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left((e^{i\theta})^2 + 2e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2 \right) = \frac{1}{4} \left((e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos 2\theta + 2) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\end{aligned}$$

تمرين 10: بين أن: $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ لكل $\theta \in \mathbb{R}$

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا: $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \text{ و منه:}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{1}{4} \left((e^{i\theta})^2 - 2e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2 \right) = \frac{1}{4} \left((e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} (2 \cos 2\theta - 2) = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\end{aligned}$$

ملحوظة: لكل $n \in \mathbb{N}$ و $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i \sin(n\theta) \text{ و } e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$$

تمرين 11: بين أن: $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$ لكل $\theta \in \mathbb{R}$

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا حسب صيغة أولير:

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \text{ اذن } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

و منه:

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} \left(e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta} \right)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} \left((e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right)$$

ونعلم أن: $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$ و منه:

$$= \frac{1}{8} (2 \cos 3\theta + 3 \times 2 \cos \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

تمرين 12: بين أن: $\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$ لكل $\theta \in \mathbb{R}$

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا حسب صيغة أولير:

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

و منه:

$$\sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{8i} \left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{8i} \left(e^{i3\theta} - 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} - e^{-i3\theta} \right)$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{8i} \left((e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right)$$

ونعلم أن: $2i \sin n\theta = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$

$$= -\frac{1}{8i} (2i \sin 3\theta - 3 \times 2i \sin \theta) = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

تمرين 13: بين أن: $\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

لكل $\theta \in \mathbb{R}$

الجواب: ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا حسب صيغة أولير:

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 \text{ و منه:}$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} \left((e^{i\theta})^4 - 4(e^{i\theta})^3 \cdot e^{-i\theta} + 6(e^{i\theta})^2 \cdot (e^{-i\theta})^2 - 4(e^{i\theta})^1 (e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4 \right)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} \left(e^{4i\theta} - 4e^{3i\theta} \cdot e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta} \cdot e^{-2i\theta} - 4e^{i\theta} \cdot e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta} \right)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} \left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta} \right)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} \left(-4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6 + (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) \right)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} \left(-4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6 + (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) \right)$$

لدينا: $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$ و منه:

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{16} (-4 \times 2 \cos 2\theta + 6 + 2 \cos 4\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} (-4 \cos 2\theta + 3 + \cos 4\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

تمرين 14: بين أن: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

لكل $\theta \in \mathbb{R}$

الجواب: لدينا حسب صيغة موافر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

و لدينا أيضا:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \text{ و منه:}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ و } \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

(حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

تمرين 15: بين باستعمال صيغة موافر أن:

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\text{و أن: } \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

الجواب: لدينا حسب صيغة موافر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

و لدينا أيضا:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3(\cos \theta)^2 i \sin \theta + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

و منه:

$$\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$\text{اذن: } \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

و منه : $P(Z) = (z+i)(z^2 - 16z + 89)$

حل المعادلة : $z^2 - 16z + 89 = 0$

نجد : $\Delta = -100$ ومنه $z = 8 - 5i$ او $z = 8 + 5i$

إذن : مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{-i; 8 - 5i; 8 + 5i\}$

تمرين 18: نعتبر : $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

(1) أ) حدد الشكل الأسى ل z ب) حدد الشكل الجبري ل z

(2) استنتج $\cos \frac{11\pi}{12}$ و $\sin \frac{11\pi}{12}$

الأجوبة: (1) أ) تحديد الشكل الأسى : $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

$$z = e^{-i\pi} \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \pi} = e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

ب) تحديد الشكل الجبري:

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$z = \frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

(2) من أ) و ب) : $\sin \frac{-11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$ و $\cos \frac{-11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

$$\text{إذن } \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \quad \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

و $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta$ (حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta + 3\cos^3 \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

تمرين 16: حل في \mathbb{C} : $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$

$$3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

الأجوبة: 1- حل المعادلة : $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$

$$\text{لدينا : } \Delta = -36 \quad z_1 = \frac{2-i\sqrt{36}}{4}; \quad z_2 = \frac{2+i\sqrt{36}}{4}$$

$$\text{إذن : } S = \left\{ \frac{1-3i}{2}; \frac{1+3i}{2} \right\}$$

$$3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

نلاحظ أن : 1 يعدم $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$

ومنه : $z - 1$ يقسم $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$

$$\text{نجد : } 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = (Z-1)(3Z^2 + 2)$$

حل المعادلة : $3Z^2 + 2 = 0$

$$Z^2 = -\frac{2}{3} \quad \text{إذن : } Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{أو} \quad Z = i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ومنه : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

$$\text{يعني : } Z = 1 \quad \text{أو} \quad Z = i\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{أو} \quad Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{إذن : } S = \left\{ 1; i\sqrt{\frac{2}{3}}; -i\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

تمرين 17: $P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i$

(1) بين أن $P(Z) = 0$ (E) تقبل حلا تخيلا صرفا z_0 يجب تحديده

(2) حل في \mathbb{C} : $P(Z) = 0$

الأجوبة: 1) لنبين أن $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا

نعتبر : $z_0 = ib$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 - (16-i)(ib)^2 + (89-16i)ib + 89i = 0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 + 16b + i(-b^3 - b^2 + 89b + 89) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 + 16b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 89b + 89 = 0 \end{cases}$$

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow b = -1$$

و منه : $P(Z) = 0$ تقبل حلا تخيلا صرفا $z_0 = -i$

(2) حل المعادلة $P(Z) = 0$ في \mathbb{C} :

بما أن : $-i$ جذر ل $P(Z)$ فإن :

$$P(Z) = (z+i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$P(Z) = z^3 + (i+\alpha)z^2 + (\alpha i + \beta)z + \beta i$$

و بما أن : $P(Z) = Z^3 - (16-i)Z^2 + (89-16i)Z + 89i$

$$\text{فإن : } \alpha = -16 \quad \text{و} \quad \beta = 89$$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

