.01

01. نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+13=0$.

- نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times13=-36=i^2\times6^2=(6i)^2$
- حلي المعادلة هما : $z_1=\frac{4+6i}{2}=2+3i$ و $z_2=\overline{z_1}=2-3i$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S=\{2+3i;2-3i\}$

02. لكل عدد عقدي z نضع $P(z)=z^3-6z^2+21z-26$

أ- نحسب $P(2)$.

لدينا : $P(2)=2^3-6\times2^2+21\times2-26=0$. خلاصة : $P(2)=0$.

ب- نحدد a و b من $\mathbb{R}$ حيث : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$ ثم حل المعادلة : $P(Z)=0$: $z\in\mathbb{C}$.

- نحدد a و b من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$P(z)=(z-2)(z^2+az+b)\Leftrightarrow z^3-6z^2+21z-26=(z-2)(z^2+az+b)$$
$$\Leftrightarrow z^3-6z^2+21z-26=z^3+az^2+bz-2z^2-2az-2b$$
$$\Leftrightarrow z^3-6z^2+21z-26=z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-2=-6\\b-2a=21\\-2b=-26\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=13\end{cases}$$

و منه : $a=-4$ و $b=13$.

- نحل المعادلة :

$$P(Z)=0\Leftrightarrow(z-2)(z^2-4z+13)=0$$
$$\Leftrightarrow z-2=0 \text{ أو } (z^2-4z+13)=0$$
$$\Leftrightarrow z=2 \text{ أو } z=2-3i \text{ أو } z=2+3i$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S'=\{2;2+3i;2-3i\}$

.02 باك 2015 الدورة العادية

01. نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+10z+26=0$ . ... (0,75 ن)

- نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta=10^2-4\times1\times26=-4=i^2\times2^2=(2i)^2$
- حلي المعادلة هما : $z_1=\frac{-10+2i}{2}=-5+i$ و $z_2=\overline{z_1}=-5-i$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S=\{-5+i;-5-i\}$

02. نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط A و B و C و Ω التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c و ω حيث : $a=-2+2i$ و $b=-5+i$ و $c=-5-i$ و $\omega=-3$.

أ- نبين أن : $\frac{b-\omega}{a-\omega}=i$ . ... (0,5 ن)

لدينا : $\frac{b-\omega}{a-\omega}=\frac{-5+i-(-3)}{-2+2i-(-3)}=\frac{-2+i}{1+2i}=\frac{i\cancel{(2i+1)}}{\cancel{1+2i}}=i$. خلاصة : $\boxed{\frac{b-\omega}{a-\omega}=i}$.

ب- نستنتج طبيعة المثلث ΩAB . ... (0,5 ن)

بما أن : $\frac{b-\omega}{a-\omega}=i$ إذن $\frac{\Omega B}{\Omega A}=|i|=1$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)\equiv\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\arg i\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

خلاصة : المثلث ΩAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في Ω .

03. لتكن D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $6+4i$.

أ- نبين أن : d لحق للنقطة D هو $1+3i$ . ... (0,5 ن)

لدينا :

$$\begin{aligned} T(C)=D &\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\vec{u}\\ &\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{CD}}=Z_{\vec{u}}\\ &\Leftrightarrow Z_D-(-5-i)=6+4i\\ &\Leftrightarrow Z_D=-5-i+6+4i\\ &\Leftrightarrow Z_D=1+3i \end{aligned}$$

خلاصة : لحق للنقطة D هو $d=1+3i$.

ب- نبين أن : $\frac{b-d}{a-d}=2$ و استنتج أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BD]$ . ... (0,5 ن)

- نبين أن :

لدينا : $2=\frac{b-d}{a-d}=\frac{-5+i-(1+3i)}{-2+2i-(1+3i)}=\frac{-6-2i}{-3-i}=\frac{2\cancel{(-3-i)}}{\cancel{-3-i}}=2$

خلاصة : $\boxed{\frac{b-d}{a-d}=2}$

- نستنتج أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BD]$.

من خلال: $\frac{b-d}{a-d}=2$ فإن : $b-d=2(a-d)$ أي $\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DA}$ أي $\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ و منه : A هي منتصف القطعة $[BD]$.

خلاصة : النقطة A هي منتصف القطعة $[BD]$.

.03 باك 2015 الدورة الاستدراكية

01. أ- نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+32=0$ . ... (0,75 ن)

- نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta=8^2-4\times1\times32=-64=i^2\times8^2=(8i)^2$

- حلي المعادلة هما : $z_1 = \frac{8+8i}{2} = 4+4i$ و $z_2 = \overline{z_1} = 4-4i$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S = \{4+4i ; 4-4i\}$

ب – نعتبر العدد العقدي a حيث : $a = 4+4i$. نكتب العدد العقدي على الشكل المثلثي ثم استنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب. (0,75 ن)

- نكتب العدد العقدي على الشكل المثلثي :

لدينا : $a = 4+4i = 4(1+i) = [4,0]\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

- نستنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب :

لدينا :

$$a^{12} = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]^{12} = \left[\left(4\sqrt{2}\right)^{12}, 12\times\frac{\pi}{4}\right] = \left[4^{15}, 3\pi\right] = \left[4^{15}, \pi\right] = 4^{15}\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = 4^{15}\times(-1) = -4^{15} \in \mathbb{R}^-$$

خلاصة : الشكل المثلثي ل a هو $a = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ ثم $a^{12} = -4^{15} \in \mathbb{R}^-$.

02. نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c حيث : $a = 4+4i$ و $b = 2+3i$ و $c = 3+4i$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- بين أن : $z' = iz+7+i$ . ... (0,5 ن)

لدينا : الشكل العقدي للدوران هو : $z' - \omega = (z-\omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو قياس زاوية الدوران :

و منه :

$$z' - (3+4i) = (z-(3+4i))e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$z' = 3+4i + (z-(3+4i))i$$
$$z' = 3+4i+zi-3i+4$$
$$z' = iz+7+i$$

خلاصة : $z' = iz+7+i$

ب- نتحقق أن : d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$ . ... (0,5 ن)

لدينا :

$$R(A) = D \Leftrightarrow d = ia+7+i$$
$$\Leftrightarrow d = i(4+4i)+7+i$$
$$\Leftrightarrow d = 5i+3$$

خلاصة : d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$.

ج- نبين أن : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ هي المستقيم (BC) . ... (0,5 ن)

لدينا : $MD = MA \Leftrightarrow |z-3-5i| = |z-4-4i|$ وهذا يكافئ النقطة M تنتمي للمستقيم (Δ) لواسط $[AD]$

إذن نبين أن $(\Delta) = (BC)$ أي نبين أن $B \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta)$.

- بالنسبة ل : $B\in(\Delta)$

لدينا :

$|b-3-5i|=|2+3i-3-5i|=|-1-2i|=\sqrt{5}$

$|b-4-4i|=|2+3i-4-4i|=|-2-i|=\sqrt{5}$

و منه : $|b-3-5i|=|b-4-4i|$ ومنه $B\in(\Delta)$

- بالنسبة ل : $C\in(\Delta)$

لدينا :

$|c-3-5i|=|3+4i-3-5i|=|-i|=1$

$|c-4-4i|=|3+4i-4-4i|=|-1|=1$

و منه : $|c-3-5i|=|c-4-4i|$ ومنه $C\in(\Delta)$

ومنه : $(\Delta)=(BC)$.

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i|=|z-4-4i|$ هي المستقيم (BC).

طريقة 2 :

- نبين أن : $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$.

$Z_{\overrightarrow{BC}}=c-b=3+4i-2-3i=1+i$ إذن $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ و $Z_{\overrightarrow{AD}}=d-a=3+5i-4-4i=-1+i$ ومنه : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

و منه : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-1+1=0$ و بالتالي $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$.

نبين أن : $BD=BA$

لدينا : $BD=|d-b|=|3+5i-2-3i|=|1+2i|=\sqrt{5}$

$BA=|a-b|=|4+4i-2-3i|=|2-i|=\sqrt{5}$

و منه : $BD=BA$ إذن المثلث متساوي الساقين في B و $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$ إذن (BC) ارتفاع ومنه (BC) واسط القطعة $[AD]$ إذن (BC) هو مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i|=|z-4-4i|$

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i|=|z-4-4i|$ هي المستقيم (BC).

طريقة 3 :

$$\begin{aligned}|z-3-5i|=|z-4-4i| &\Leftrightarrow MD=MA\\ &\Leftrightarrow (-3-x)^2+(-5-y)^2=(-4-x)^2+(-4-y)^2\\ &\Leftrightarrow 9+6x+\cancel{x^2}+25+10y+\cancel{y^2}=16+8x+\cancel{x^2}+16+8y+\cancel{y^2}\\ &\Leftrightarrow 2x-2y+2=0\\ &\Leftrightarrow x-y+1=0\end{aligned}$$

مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية هي $x-y+1=0$ منظمية عليه هي $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

لدينا : $Z_{\overrightarrow{BC}}=c-b=3+4i-2-3i=1+i$ إذن $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ منظمية على (Δ)

ولدينا $b = 2+3i$ إذن $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ تحقق المعادلة $x-y+1=0$ وبالتالي $B\in(\Delta)$ و بالتالي $(\Delta)=(BC)$

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ هي المستقيم (BC)

طريقة 4 :

$$\begin{aligned}
|z-3-5i| = |z-4-4i| &\Leftrightarrow MD = MA \\
&\Leftrightarrow (-3-x)^2 + (-5-y)^2 = (-4-x)^2 + (-4-y)^2 \\
&\Leftrightarrow 9+6x+\cancel{x^2}+25+10y+\cancel{y^2} = 16+8x+\cancel{x^2}+16+8y+\cancel{y^2} \\
&\Leftrightarrow 2x-2y+2=0 \\
&\Leftrightarrow x-y+1=0
\end{aligned}$$

مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية هي $x-y+1=0$

من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}
M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(BC) &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow x-2-y+3=0 \\
&\Leftrightarrow x-y+1
\end{aligned}$$

ومنه : $(\Delta)=(BC)$.

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ هي المستقيم (BC)

.04

المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{u},\vec{v})$ (وحدة القياس هي 4 cm) .

لنعتبر النقطة A التي لحقها $z_A = i$ و النقطة B التي لحقها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

.01 لنعتبر الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$. نضع $r(B)=C$.

أ- نحدد كتابة عقدية للدوران r .

لدينا : الشكل العقدي للدوران هو : $z'-\omega = (z-\omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو قياس زاوية الدوران :

و منه :

$$\begin{aligned}
z'-0 &= (z-0)e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
z' &= z\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
z' &= z\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

خلاصة : كتابة عقدية للدوران r $z'=z\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ب- نبين أن : لحق النقطة C هو $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا :

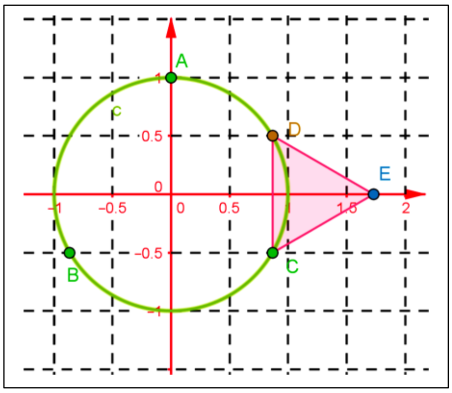
$$r(B)=C\Leftrightarrow c=e^{-i\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow c=e^{-i\frac{5\pi}{6}}e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad \left(j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow c=e^{i\frac{-5\pi+4\pi}{6}}$$
$$\Leftrightarrow c=e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

خلاصة : لحق النقطة C هو $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ج- نكتب : z_B و z_C على الشكل الجبري .

- لدينا : $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
- لدينا : $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.
- خلاصة : الشكل الجبري ل : $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

د- ننشئ النقط A و B و C.



02. لنعتبر D مرجح النقط A و B و C معينة بالأوزان 2 و 1− و 2 على التوالي .

أ- نبين أن : لحق D هو $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ثم أنشئ النقطة D .

لدينا : D مرجح النقط A و B و C معينة بالأوزان 2 و 1− و 2 على التوالي ومنه : $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2-1+2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

ومنه : $z_D=\frac{2z_A-z_B+2z_C}{2-1+2}=\frac{1}{3}\left(2i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

خلاصة : لحق D هو $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

ب- نبين أن النقط A و B و C و D تنتمي لنفس الدائرة .

نلاحظ أن : $|z_A|=|i|=1$ و $|z_B|=\left|e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right|=1$ و $|z_C|=\left|e^{-i\frac{\pi}{6}}\right|=1$ و $|z_D|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|=1$ ومنه النقط A و B و C و D تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1 .

خلاصة : النقط A و B و C و D تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1 .

.03 لنعتبر التحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2 ؛ نضع $h(D)=E$.

أ- نحدد كتابة عقدية للتحاكي h .

لدينا :

$$h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$$
$$\Leftrightarrow z'-i=2(z-i)$$
$$\Leftrightarrow z'=2z-i$$

خلاصة : الكتابة عقدية للتحاكي h. هي : $z'=2z-i$.

ب- نبين أن : لحق E هو $z_E=\sqrt{3}$ ثم أنشئ النقطة E .

لدينا : $h(D)=E \Leftrightarrow z_E=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-i=\sqrt{3}$

خلاصة : لحق E هو $z_E=\sqrt{3}$.

.04 أ- نحسب النسبة $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$ ثم إعطاء الشكل الأسي .

لدينا : $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ خلاصة : $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- إعطاء الشكل الأسي :

لدينا : $e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$

خلاصة : $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- نستنتج طبيعة المثلث CDE .

من خلال $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ إذن : $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1=\frac{|z_D-z_C|}{|z_E-z_C|}=\left|\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}\right|$ و منه $DC=EC$ و

$$\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$$

خلاصة : المثلث CDE متساوي الأضلاع .

.05

المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{u},\vec{v})$ (وحدة القياس هي 2 cm) .

لنعتبر النقط I و A و B ألحاقها $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$ على التوالي و الدائرة $(\mathcal{C})$ التي قطرها $[AB]$.

.01 نحدد المركز Ω و الشعاع للدائرة $(\mathscr{C})$.

- المركز Ω هو منتصف $[AB]$ ومنه $z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_A = 1-2i-2+2i}{2} = \frac{-1}{2}$
- الشعاع هو : $r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2+2i-1+2i|}{2} = \frac{|-3+4i|}{2} = \frac{5}{2}$

خلاصة : المركز Ω لحقه هو $z_\Omega = \frac{1}{2}$ و الشعاع للدائرة $r = \frac{5}{2}$ $(\mathscr{C})$.

.02 لنعتبر النقطة D التي لحقها $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$

- نعطي الشكل الجبري ل z_D

$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

- نثبت أن D تنتمي للدائرة $(\mathscr{C})$.

لدينا : $r = \frac{5}{2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \left|2+\frac{3}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}\right| = \Omega D = |z_D - z_\Omega|$ و منه : $\Omega D = r$

خلاصة : D تنتمي للدائرة $(\mathscr{C})$.

.03 على الدائرة $(\mathscr{C})$ ؛ نعتبر النقطة E التي لحقها z_E حيث قياس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}\right)$ هو $\frac{\pi}{4}$.

أ- نحدد المعيار و عمدة ل $z_E + \frac{1}{2}$.

لدينا :

- النقطة E التي لحقها z_E حيث قياس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}\right)$ هو $\frac{\pi}{4}$ و منه :
- المعيار هو : $\Omega E = \left|z_E + \frac{1}{2}\right|$ و لدينا : $E \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \Omega E = r = \frac{5}{2}$ و منه : $\left|z_E + \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$.
- عمدة : لدينا :

$$\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_E - z_\Omega}{z_I - z_\Omega}\right) \equiv \arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) - \arg\left(\frac{3}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) - 0 \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

ومنه : $\arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

خلاصة : المعيار $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\frac{5}{2}$ و عمدة ل $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

ب- نستنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

من خلال : المعيار $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\frac{5}{2}$ و عمدة ل $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ الشكل المثلثي هو $z_E + \frac{1}{2} = \left[\frac{5}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

و منه $z_E + \frac{1}{2} = \left[\frac{5}{2};\frac{\pi}{4}\right] = \frac{5}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{5\sqrt{2}}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4}$ و منه :

$$z_E = \frac{5\sqrt{2}}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$$

خلاصة : $\boxed{z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i}$

.04 لنعتبر التحويل r من المستوى (P) نحوى المستوى (P) الذي يربط كل نقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z'

حيث : $z' + \frac{1}{2} = \left(z + \frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

أ- نحدد طبيعة التحويل r و عناصره المميزة .

التحويل هو على شكل : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ إذن التحويل هو دوران مع $\omega = -\frac{1}{2}$ هو لحق مركز الدوران و $\theta = \frac{\pi}{4}$ هو

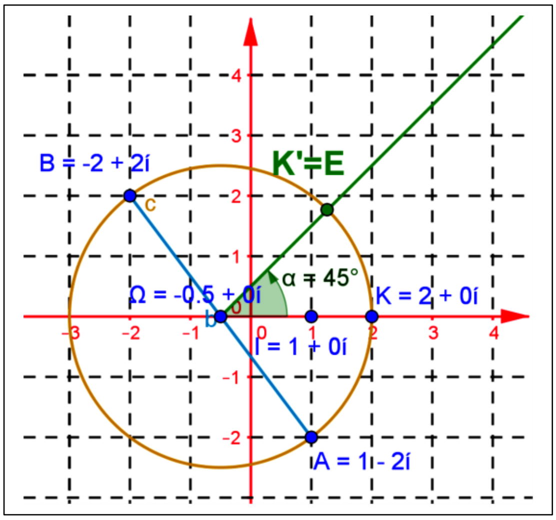
قياس زاوية الدوران :

ب- لتكن النقطة K التي لحقها $z_K = 2$. بالحساب حدد صورة K ب r .

- بالحساب حدد صورة K ب r

نعتبر K' لحقها k' صورة K ب r .

و منه :



$$r(K) = K' \Leftrightarrow z' + \frac{1}{2} = \left(z + \frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; (z = 2 \ ; \ z' = k')$$

$$\Leftrightarrow k' + \frac{1}{2} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow k' = \left(\frac{5}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k' = \frac{5}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k' = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i = z_E$$

و منه: صورة K هي K' التي لحقها $k' = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i = z_E$