السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 :

لنحل المعادلة : $z^2+3z-4=0$

لدينا : $\Delta=9+16=25=5^2$ منه : $z_1=\dfrac{-3+5}{2}=1$ و $z_2=\dfrac{-3-5}{2}=-4$ بالتالي : $S=\{1;-4\}$

لنحل المعادلة : $z^2+2z+1=0$ ، لدينا : $\Delta=4-4=0$ منه : $z_1=z_2=\dfrac{-2}{2}=-1$ بالتالي : $S=\{-1\}$

لنحل المعادلة : $z^2-6z+10=0$

لدينا : $\Delta=36-40=-4=(2\boldsymbol{i})^2$ منه : $z_1=\dfrac{6+2\boldsymbol{i}}{2}=3+\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{6-2\boldsymbol{i}}{2}=3-\boldsymbol{i}$ بالتالي : $S=\{3+\boldsymbol{i};3-\boldsymbol{i}\}$

لنحل المعادلة : $z^2+49=0$ ، لدينا :

$$z^2+49=0 \Leftrightarrow z^2-(-49)=0 \Leftrightarrow z^2-(7\boldsymbol{i})^2=0 \Leftrightarrow (z-7\boldsymbol{i})(z+7\boldsymbol{i})=0 \Leftrightarrow z=7\boldsymbol{i} \ ou \ z=-7\boldsymbol{i}$$

بالتالي : $S=\{7\boldsymbol{i};-7\boldsymbol{i}\}$

يمكن أيضا استعمال المحددة حيث : $a=1$ و $b=0$ و $c=49$

لنحل المعادلة : $z^3+1=0$ ، لدينا :

$$z^3+1=0=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow (z+1=0)\ ou\ (z^2-z+1=0)$$

و لدينا بالنسبة للمعادلة : $z^2-z+1=0$: $\Delta=1-4=-3=(\sqrt{3}\boldsymbol{i})^2$

منه : $z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ بالتالي : $S=\left\{-1\ ;\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\ ;\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right\}$

للتذكير لحل المعادلة : $az^2+bz+c=0$ في C حيث a و b و c أعداد حقيقية نحسب المحددة $\Delta=b^2-4ac$ و نكتبها على شكل مربع $(\Delta=\delta^2)$ (إذا كان Δ سالبا ندرج العدد $\boldsymbol{i}$ للحصول على مربع) ثم يكون الحلان :

$z_1=\dfrac{-b+\delta}{2}$ و $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2}$

لا يصح الآن كتابة : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ لأن Δ قد لا يكون عددا حقيقيا و الجذر المربع هو تعريف يخص الأعداد الحقيقية

تمرين 2 : $P(z)=z^3-7z^2+25z-39$

1 لدينا : $P(3)=27-63+75-39=0$ إذن 3 جذر للحدودية $P(z)$

2 بإجراء القسمة الإقليدية لـ $P(z)$ على $z-3$ نستنتج أن : $a=1$ و $b=-4$ و $c=13$

$z^3-7z^2+25z-39$	$z-3$
z^3-3z^2	$z^2-4z+13$
$0\ \ -4z^2+25z$	
$-4z^2+12z$	
$0\ \ 13z-39$	
$13z-39$	
0	

3 لدينا : $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-3=0)\ ou\ (z^2-4z+13=0)$

و لدينا بالنسبة للمعادلة : $z^2-z+1=0$: $\Delta=16-52=-36=(6\boldsymbol{i})^2$

منه : $z_1=\dfrac{4+6\boldsymbol{i}}{2}=2+3\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{4-6\boldsymbol{i}}{2}=2-3\boldsymbol{i}$ بالتالي : $S=\{3;\ 2+3\boldsymbol{i}\ ;\ 2-3\boldsymbol{i}\}$

تمرين 3 :

1

لدينا : $z^2-z+1=0 \iff z^2+1=z \iff \dfrac{z^2+1}{z}=1 \iff z+\dfrac{1}{z}=1$

و $\Delta=1-4=-3=\left(\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\right)^2$ ، منه : $z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$

بالتالي : $S=\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\ ;\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right\}$

2

$z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}=\left[1\,;\dfrac{\pi}{3}\right]=e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}=\left[1\,;\dfrac{-\pi}{3}\right]=e^{\frac{-\pi}{3}i}$

تمرين 4 :

1

لنحل في C المعادلة : $z^2+2z+2=0$ ، لدينا $\Delta=4-8=-4=(2\boldsymbol{i})^2$

منه : $z_1=\dfrac{-2+2\boldsymbol{i}}{2}=-1+\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{-2-2\boldsymbol{i}}{2}=-1-\boldsymbol{i}$ بالتالي : $S=\{-1+\boldsymbol{i}\ ;\ -1-\boldsymbol{i}\}$

2

$$z_1=-1+\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right)=\left[\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$z_2=-1-\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\right)=\left[\sqrt{2}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

3

$$K=z_1^8+z_2^8=\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^8+\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}\right)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8e^{\frac{3\pi}{4}i\times 8}+\left(\sqrt{2}\right)^8e^{\frac{5\pi}{4}i\times 8}=16e^{6\pi i}+16e^{10\pi i}=16+16=32$$

للتذكير $e^{\theta i}=\cos(\theta)+\boldsymbol{i}\sin(\theta)$ و كحالة خاصة : $e^{2k\pi i}=\cos(2k\pi)+\boldsymbol{i}\sin(2k\pi)=1$

تمرين 5 :

1

لنحل في C المعادلة $z^2+4\sqrt{3}\,z+16=0$ ،لدينا $\Delta=16\times3-4\times16=48-64=-16=(4\boldsymbol{i})^2$

منه : $z_1=\dfrac{-4\sqrt{3}+4\boldsymbol{i}}{2}=-2\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{-4\sqrt{3}-4\boldsymbol{i}}{2}=-2\sqrt{3}-2\boldsymbol{i}$

بالتالي : $S=\left\{-2\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}\ ;\ -2\sqrt{3}-2\boldsymbol{i}\right\}$

2

$$z_1=-2\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}=4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)=\left[4;\frac{5\pi}{6}\right]=4e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$z_2=-2\sqrt{3}-2\boldsymbol{i}=4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)=\left[4;\frac{7\pi}{6}\right]=4e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

3

$A(z_1)$ و $B(z_2)$. R نعتبر الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

أ) نعلم أن الصيغة العقدية للدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ هي : $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}(z-z_O)+z_O$

أي : $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}z$ منه : $z_{A'}=e^{\frac{\pi}{3}i}z_A=e^{\frac{\pi}{3}i}\times4e^{\frac{5\pi}{6}i}=4\,e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)i}=4\ e^{\frac{7\pi}{6}i}$

ب) نستنتج من السؤال السابق أن $z_{A'}=z_B$ أي أن B هي صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ ، و ذلك يعني أن المثلث OAB متساوي الأضلاع.

تمرين 6 : $A(2+\boldsymbol{i})$ و $B(5+2\,\boldsymbol{i})$ و $C(1+4\,\boldsymbol{i})$.

1 التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ هو : $z' = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - z_A) + z_A$

أي : $z' = \boldsymbol{i}(z - 2 - \boldsymbol{i}) + 2 + \boldsymbol{i}$ أي $z' = \boldsymbol{i}\, z - 2\boldsymbol{i} + 1 + 2 + \boldsymbol{i}$ أي $z' = \boldsymbol{i}\, z + 3 - \boldsymbol{i}$

2 $z_{B'} = \boldsymbol{i}\, z_B + 3 - \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\,(5 + 2\boldsymbol{i}) + 3 - \boldsymbol{i} = 5\boldsymbol{i} - 2 + 3 - \boldsymbol{i} = 1 + 4\boldsymbol{i} = z_C$

إذن صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ هي النقطة C

بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة A

تمرين 7 :

1

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}\right)^3$$
$$= \frac{e^{3\theta i} + 3e^{2\theta i}.e^{-\theta i} + 3e^{\theta i}.e^{-2\theta i} + e^{-3\theta i}}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3\theta i} + 3e^{\theta i} + 3e^{-\theta i} + e^{-3\theta i}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3\theta i} + e^{-3\theta i} + 3\left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta) + 3\times 2\cos(\theta)\right)$$
$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$$

$$\sin^2(\theta)\,\cos(\theta) = \left(\frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2\boldsymbol{i}}\right)^2\left(\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}\right)$$
$$= \frac{e^{2\theta i} - 2e^{\theta i}\times e^{-\theta i} + e^{-2\theta i}}{-4}\times\frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$$
$$= \frac{-1}{8}\left(e^{2\theta i} - 2 + e^{-2\theta i}\right)\left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right)$$
$$= \frac{-1}{8}\left(e^{3\theta i} + e^{-\theta i} - 2e^{\theta i} - 2e^{-\theta i} + e^{\theta i} + e^{-3\theta i}\right)$$
$$= \frac{-1}{8}\left(e^{3\theta i} + e^{-3\theta i} - e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right)$$
$$= \frac{-1}{8}\left(e^{3\theta i} + e^{-3\theta i} - \left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right)\right)$$
$$= \frac{-1}{8}\left(2\cos(3\theta) - 2\cos(\theta)\right)$$
$$\sin^2(\theta)\,\cos(\theta) = \frac{-1}{4}\cos(3\theta) + \frac{1}{4}\cos(\theta)$$

أثناء الاخطاط نستعمل قواعد الترميز الأسي الشبيه بقواعد القوى : $e^a \times e^b = e^{a+b}$ ، $e^a \times e^{-a} = 1$ ، $(e^a)^n = e^{na}$

2 الدالة : $F(x) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

$F(x) = \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

هي دالة أصلية للدالة : $f(x) = \cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$

الدالة : $G(x)=\frac{-1}{4}\times\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(x)$

$G(x)=\frac{-1}{12}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(x)$

هي دالة أصلية للدالة : $g(x)=\sin^2(x)\cos(x)$

$g(x)=\frac{-1}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\cos(x)$

كثير من التكاملات التي تتضمن قوى أو جذاء دوال مثلثية يتم حسابها بعد إخطاط الدالة عن طريق الأعداد العقدية، لأن هذا الأخير يحول تعبير الدالة إلى مجموع أو فرق دوال من الشكل : $\sim\sin(ax+b)$ أو $\sim\cos(ax+b)$ و التي نعرف مسبقا دوالا أصلية لها، فالدالة $x\mapsto\frac{-\sim}{a}\cos(ax+b)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\sim\sin(ax+b)$ و الدالة $x\mapsto\frac{\sim}{a}\sin(ax+b)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\sim\cos(ax+b)$