الثانوية التأهيلية محمد السادس الأستاذ : الحيان	تصحيح الإمتحان التجريبي دورة 25 مارس 2008	الثانية بكالوريا علوم فيزيائية الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض

التمرين الأول :

1. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$. لدينا : $2x+1+\frac{1}{x+1}=\frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2x^2+2x+x+1+1}{x+1}=\frac{2x^2+3x+2}{x+1}$.

ب- لدينا : $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+2}{x+1}dx=\int_0^1 2x+1+\frac{1}{x+1}dx=\left[x^2+x+\ln(|x+1|)\right]_0^1=\boxed{2+\ln 2}$.

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نجد :

$$J=\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 x'\left(e^{-x}\right)dx$$

$$J=-e^{-1}-\int_0^1 -e^{x}dx=-e^{1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}-\left(e^{-1}-1\right)=\boxed{1-\frac{2}{e}}$$

3. لنحدد إشارة $\ln x$ على المجال $\left[\frac{1}{e},e\right]$. لدينا :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e	$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

باستعمال علاقة شال ، نحصل على ما يلي :

$$K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}|\ln(x)|dx+\int_1^e\frac{1}{x}|\ln(x)|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\ln(x)dx+\int_1^e\frac{1}{x}\ln(x)dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\ln(x)\right)'\ln(x)dx+\int_1^e\left(\ln(x)\right)'\ln(x)dx$$

$$K=-\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\boxed{1}$$

التمرين الثاني :

لكل z من $\mathbb{C}$ ، نضع : $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$.

1. لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ z^2-8z+25=0$.

لدينا : $\Delta'=b'^2-ac=(-4)^2-1\times 25=16-25=-9=(3i)^2$. إذن : للمعادلة (E) حلين عقديين مترافقين هما :

$z_1=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4+3i$ و $z_2=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4-3i$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{4-3i\ ,\ 4+3i\}$.

2. ليكن $z_0=iy$ بحيث $y\in\mathbb{R}$ ، حلا تخيليا صرفا للمعادلة $P(z)=0$. إذن :

R

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow z_0^3-(8+3i)z_0^2+(25+24i)z_0-75i=0$$
$$\Leftrightarrow (iy)^3-(8+3i)(iy)^2+(25+24i)(iy)-75i=0$$
$$\Leftrightarrow (8y^2-24y)+i(-y^3+3y^2+25y-75)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2-24y=0 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y(y-3)=0 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ أو } y=3 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \boxed{y=3}$$

وبالتالي فإن $\boxed{z_0=3i}$ هو حل تخيلي صرف للمعادلة $P(z)=0$.

3. لدينا $z_0=3i$ جذر للحدودية $P(z)$. إذن $P(z)$ تقبل القسمة على $z-3i$.

طريقة 1 : القسمة الأقليدية.

$P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$	$z-3i$
$\ominus\ z^3 - 3iz^2$	$z^2-8z+25$
$-8z^2+(25+24i)z-75i$	
$\ominus\ -8z^2+24iz$	
$25z-75i$	
$\ominus\ 25z-75i$	
$0\quad 0$	

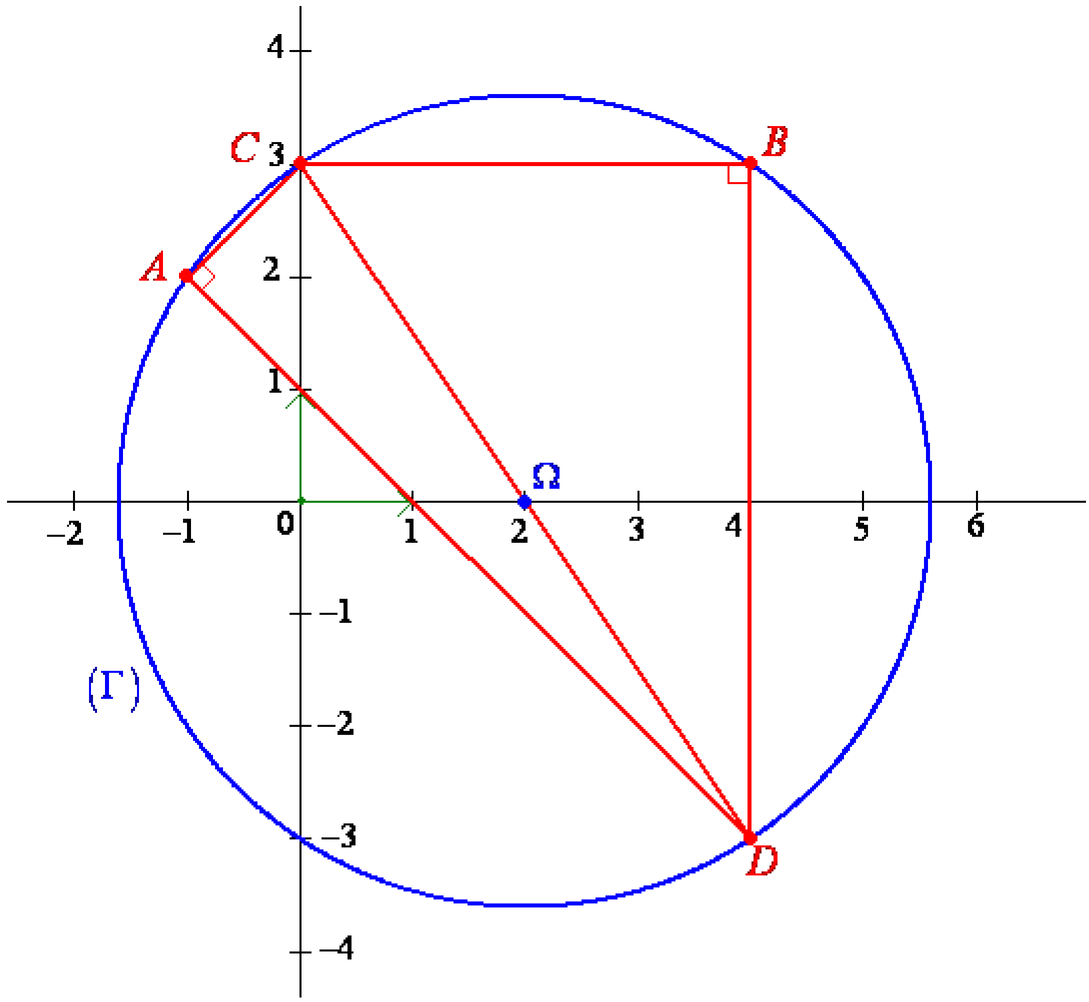
ومنه نستنتج أن : $a=-8$ و $b=25$.

طريقة 2 : تكون حدوديتان مختصرتان متساويتين إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \Leftrightarrow P(z)=z^3+az^2+bz-3iz^2-3aiz-3bi$$
$$\Leftrightarrow P(z)=z^3+(a-3i)z^2+(b-3ai)z-3bi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3i=-8-3i \\ b-3ai=25+24i \\ -3bi=-75i \end{cases}$$
$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=25 \end{cases}$$

4. في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A=-1+2i$ و $z_B=4+3i$ و $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$.

أ- تمثيل النقط A و B و C و D في المستوى العقدي $\mathscr{P}$:



ب- لدينا :

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3i-(-1+2i)}{4-3i-(-1+2i)} = \frac{1+i}{5-5i} = \frac{i(1-i)}{5(1-i)} = \boxed{\frac{1}{5}i}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3i-(4+3i)}{4-3i-(4+3i)} = \frac{-4}{-6i} = \frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i^2} = \boxed{-\frac{2}{3}i}$$

جـ- لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{1}{5}i = \left[\frac{1}{5}, \frac{\pi}{2}\right]$. إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \boxed{\frac{\pi}{2}} \; [2\pi]$. ومنه فإن المثلث ACD قائم الزاوية في A.

ولدينا : $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = -\frac{2}{3}i = \left[\frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2}\right]$. إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \boxed{-\frac{\pi}{2}} \; [2\pi]$. ومنه فإن المثلث BCD قائم الزاوية في النقطة B.

د- بما أن ACD مثلث قائم الزاوية في A ، فإنه محاط بالدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[CD]$ ، وبما أن BCD مثلث قائم الزاوية في B ، فإنه محاط بالدائرة التي أحد أقطارها $[CD]$ ، أي بالدائرة (Γ) . وبالتالي فإن النقط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة (Γ) ، و

لدينا : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة Ω منتصف القطعة $[CD]$ والتي لحقها: $z_\Omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3i+4-3i}{2} = \boxed{2}$.

شعاع الدائرة (Γ) هو $R = \Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1+2i-2| = |-3+2i| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$.

5. لدينا :

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{AD}}(C) = E \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE} \\ &\Leftrightarrow \quad z_D - z_A = z_E - z_C \end{aligned}$$

إذن : $z_E = z_D - z_A + z_C = 4-3i-(-1+2i)+3i = \boxed{5-2i}$.

التمرين الثالث :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\ln(1-x^3) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 4x\sqrt{x}-3x^2=f(0)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(1-x^3)=\ln 1=0=f(0)$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$. ومنه فإن f دالة متصلة في النقطة 0 .

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} 4\sqrt{x}-3x=0$.

إذن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و $\boxed{f'_d(0)=0}$.

نضع $t=(-x)^3$. إذن $t\underset{x\mapsto 0^-}{\to}0^+$. ومنه فإن :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(1+(-x)^3\right)}{(-x)^3}\times(-x^2)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\left(-\sqrt[3]{t^2}\right)=0$$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليسار في 0 و $\boxed{f'_g(0)=0}$.

وبما أن $f'_g(0)=f'_d(0)=0$ ، فإن f قابلة للإشتقاق في النقطة 0 ولدينا : $\boxed{f'(0)=0}$.

2. ليكن $x\in\left]-\infty,0\right[$. لدينا : $f'(x)=\left(\ln(1-x^3)\right)'=\dfrac{(1-x^3)'}{1-x^3}=\boxed{\dfrac{-3x^2}{1-x^3}}<0$ ، لأن : $-3x^2<0$ و $1-x^3>0$.

إذن f دالة <u>تناقصية</u> على المجال $\left]-\infty,0\right[$.

ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$. لدينا : $f'(x)=\left(4x\sqrt{x}-3x^2\right)'=4\left(x'\sqrt{x}+x\left(\sqrt{x}\right)'\right)-6x=4\left(\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)-6x$

$$f'(x)=4\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-6x=\sqrt{x}-6x=6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=\boxed{\frac{6\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(1-x)}$$

ومنه فإن إشارة $f'(x)$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ هي إشارة $1-x$ ، ولدينا :

x	0	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$

إذن f دالة <u>تناقصية</u> على المجال $\left[1,+\infty\right[$ ، <u>و تزايدية</u> على المجال $[0,1]$.

3. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x\sqrt{x}-3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right)=(+\infty)\times(-\infty)=\boxed{-\infty}$.

نضع $t=1-x^3$. إذن $t\underset{x\mapsto-\infty}{\to}+\infty$ ، ومنه فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln(1-x^3)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=\boxed{+\infty}$.

ب- ليكن $x\in\left]-\infty,0\right[$. لدينا :

$$3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}=\frac{\ln\left((-x)^3\right)+\ln(1-x^{-3})}{x}=\frac{\ln(-x^3)+\ln(1-x^{-3})}{x}$$
$$=\frac{\ln\left(-x^3(1-x^{-3})\right)}{x}=\frac{\ln(1-x^3)}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

جـ- نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right) = \boxed{-\infty}$.

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل **فرعا شلجميا**، بجوار $+\infty$ ، **اتجاهه محور الأراتيب**.

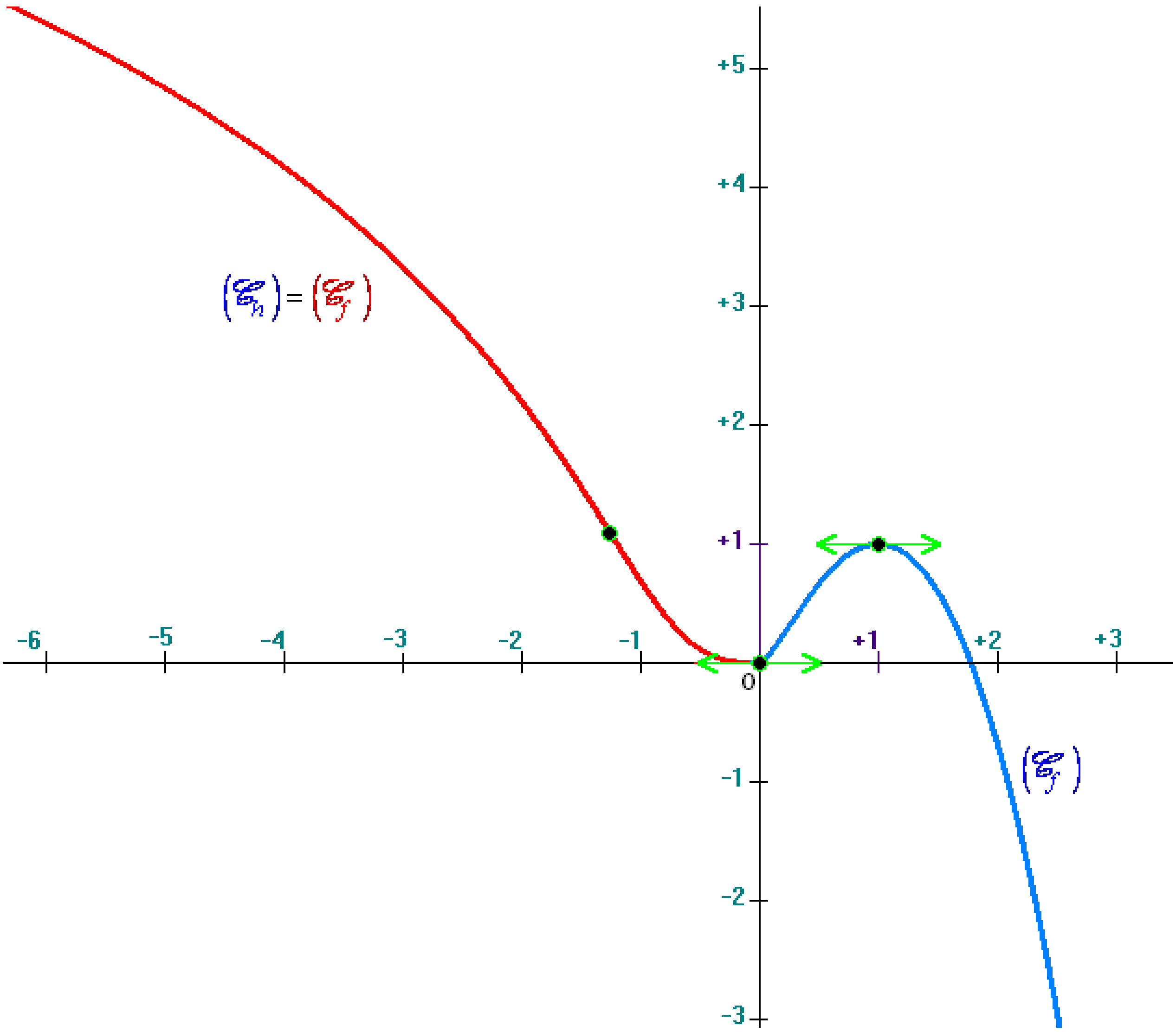
ونعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

نضع $t=-x$. إذن $t \underset{x\mapsto-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

ومنه فإن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x} = \lim_{t\to+\infty} -3\frac{\ln t}{t} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^3}\right)}{t} = \boxed{0}$.

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل **فرعا شلجميا**، بجوار $-\infty$ ، **اتجاهه محور الأفاصيل**.

4. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$:



5. أ- لدينا h دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0[$. إذن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة من المجال $J = h\left(]-\infty,0[\right) = \left]\lim_{x\to0^+} h(x), \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[=]0,+\infty[$ نحو المجال $I =]-\infty,0[$.

ب- لدينا :

$$\begin{array}{rccc} h^{-1} : &]0,+\infty[& \to &]-\infty,0[\\ & x & \mapsto & y = h^{-1}(x) \end{array}$$

ليكن $x\in]0,+\infty[$ و $y\in]-\infty,0[$ بحيث : $y=h^{-1}(x)$ ينبغي تحديده بدلالة x ؟

$$\begin{aligned}
y=h^{-1}(x) &\Leftrightarrow h(y)=x\\
&\Leftrightarrow \ln\left(1-y^{3}\right)=x\\
&\Leftrightarrow 1-y^{3}=e^{x}\\
&\Leftrightarrow -y^{3}=e^{x}-1\\
&\Leftrightarrow (-y)^{3}=e^{x}-1\\
&\Leftrightarrow (-y)^{3}=e^{x}-1\\
&\Leftrightarrow -y=\sqrt[3]{e^{x}-1}\quad,\quad (!)\quad y<0\\
y=h^{-1}(x) &\Leftrightarrow y=-\sqrt[3]{e^{x}-1}
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{h^{-1}(x)=-\sqrt[3]{e^{x}-1}}\quad : \quad \forall x\in]0,+\infty[$

6. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{4}{9} \\ u_{n+1}4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2=f(u_n)\quad ;\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ- من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{4}{9}$ ، إذن : $\frac{4}{9}\le u_0\le 1$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$. – نفترض أن : $\frac{4}{9}\le u_n\le 1$.

– نبين أن : $\frac{4}{9}\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا : f تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$.

إذن : $\frac{4}{9}\le u_n\le 1\Rightarrow f\left(\frac{4}{9}\right)\le f(u_n)\le f(1)\Rightarrow \frac{48}{81}\le u_{n+1}\le 1\Rightarrow \frac{4}{9}\le u_{n+1}\le 1$

لأن : $\frac{4}{9}\le\frac{48}{81}$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\frac{4}{9}\le u_n\le 1}\quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n&=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2-u_n=u_n\left(4\sqrt{u_n}-3u_n-1\right)\\
&=u_n\left[3\sqrt{u_n}-3u_n+\sqrt{u_n}-1\right]=u_n\left[3\sqrt{u_n}\left(1-\sqrt{u_n}\right)-\left(1-\sqrt{u_n}\right)\right]\\
u_{n+1}-u_n&=u_n\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(3\sqrt{u_n}-1\right)
\end{aligned}$$

وبما أن $\frac{4}{9}\le u_n\le 1$ ، فإن : $u_n\ge 0$ و $u_n\le 1\Rightarrow\sqrt{u_n}\le 1\Rightarrow 1-\sqrt{u_n}\ge 0$

و : $\frac{2}{3}\le\sqrt{u_n}\le 1\Rightarrow 2\le 3\sqrt{u_n}\le 3\Rightarrow 1\le 3\sqrt{u_n}-1\le 2$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad : \quad u_{n+1}-u_n\ge 0$. ومنه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

R

طريقة 2 : **البرهان بالترجع .**

✓ من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=\dfrac{4}{9}$ و $u_1=f(u_0)=f\left(\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{48}{81}$. إذن : $u_1\geq u_0$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. – نفترض أن : $u_{n+1}\geq u_n$.

– ونبين أن : $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

نعلم أن f تزايدية على المجال $\left[\dfrac{4}{9},1\right]$ وأن $\dfrac{4}{9}\leq u_n\leq 1$: $\forall n\in\mathbb{N}$.

إذن :
$$\begin{aligned} u_{n+1}\geq u_n &\Rightarrow f(u_{n+1})\geq f(u_n)\\ &\Rightarrow u_{n+2}\geq u_{n+1}\end{aligned}$$

✓ وبالتالي فإن : $u_{n+1}\geq u_n$: $\forall n\in\mathbb{N}$.

وعليه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

جـ- بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة ، وبما أن :

✓ f متصلة على المجال $\left[\dfrac{4}{9},1\right]$.

✓ f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left[\dfrac{4}{9},1\right]$. إذن : $f\left(\left[\dfrac{4}{9},1\right]\right)=\left[f\left(\dfrac{4}{9}\right),f(1)\right]=\left[\dfrac{48}{81},1\right]\subset\left[\dfrac{4}{9},1\right]$.

✓ $u_0=\dfrac{4}{9}\in\left[\dfrac{4}{9},1\right]$.

✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l.

فإن : $l=f(l)$ و $l\in\left[\dfrac{4}{9},1\right]$.

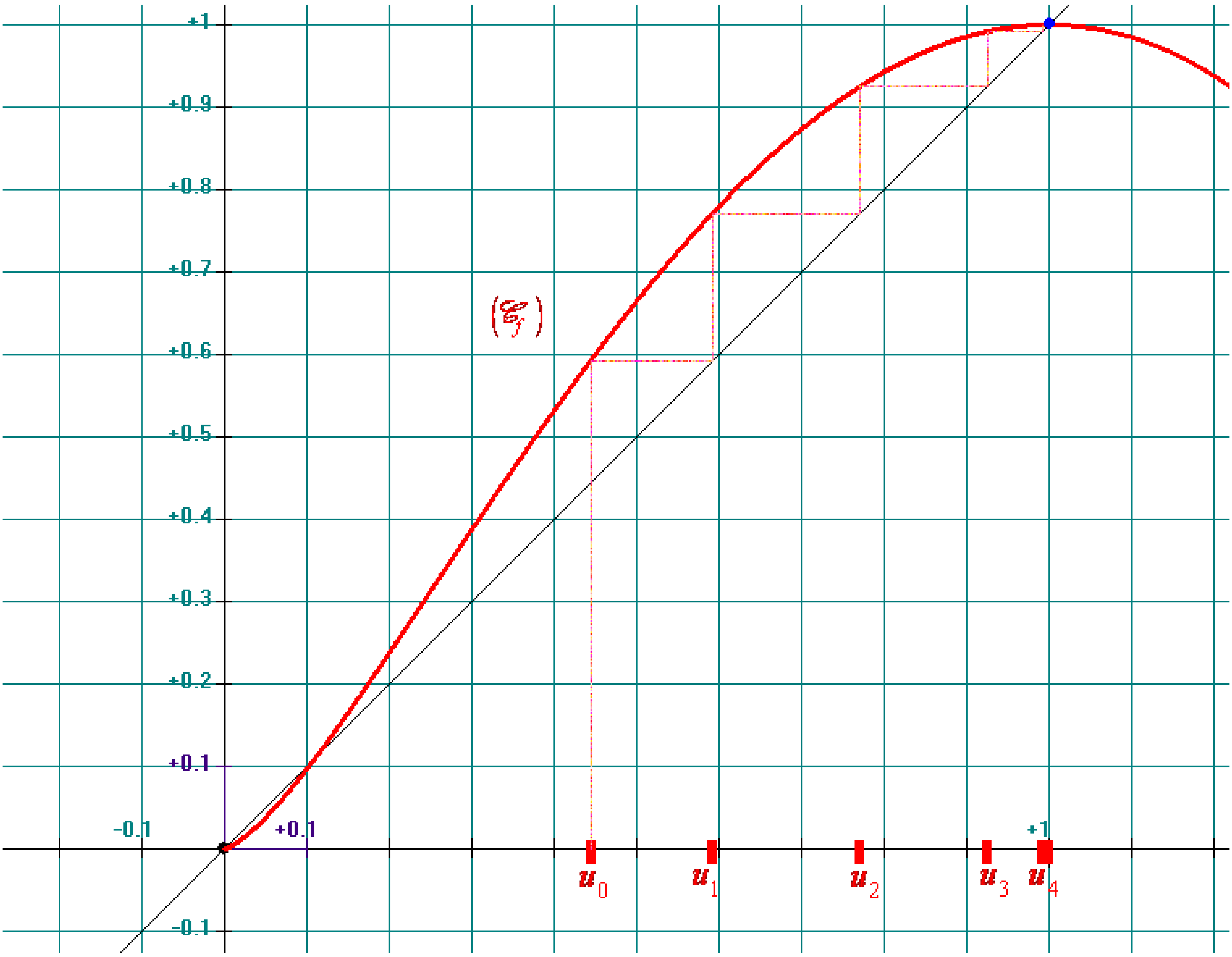
$$\begin{aligned} f(l)=l &\Leftrightarrow 4l\sqrt{l}-3l^2-l=0\\ &\Leftrightarrow l\left(\sqrt{l}-1\right)\left(3\sqrt{l}-1\right)=0\end{aligned}$$

$$f(l)=l \Leftrightarrow l=0 \text{ أو } l=1 \text{ أو } l=\frac{1}{9}$$

وبما أن : $l\in\left[\dfrac{4}{9},1\right]$ ، فإن : $l=1$. وبالتالي فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$.

تمثيل حدود المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على محور الأفاصيل : باستعمال البرنام **Archimède II plus**

حساب الحدود الثمانية الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى 10^{-39} : باستعمال البرنام **Maple 8**




```
> f:=x->4*x*sqrt(x)-3*x^2;
```

$$f := x \to 4\,x\,\sqrt{x} - 3\,x^2$$

```
> u||0:=4/9;
```

$$u0 := \frac{4}{9}$$

```
> for n from 0 to 7 do u||(n+1):=evalf ( f(u||n),40) end do;
>
```

$$u1 := .5925925925925925925925925925925925925926$$

$$u2 := .7712140194964303997655401787057750038570$$

$$u3 := .9247701451602197326158548026141754153920$$

$$u4 := .9916202658372601288144754474477286897920$$

$$u5 := .9998948176533726249213081014285133390640$$

$$u6 := .9999999834053018650620684499257125957820$$

$$u7 := .9999999999999995869239918579099248198650$$

$$u8 := .9999999999999999999999999999999744052317$$