

المادة : الرياضيات المستوى : 2 سلك البكالوريا الشعبة : علوم تجريبية المعامل : 7 المدة : 3 ساعات	الامتحان التجريبي	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمي الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الشاوية ورديغة-سطات نيابة خريبكة ثانوية يوسف بن تاشفين التأهيلية
	أبريل 2007	

تمرين 1

(1) أ) نحسب $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ لدينا $A(0; 1; 1)$; $B(1; 4; 0)$; $C(1; 0; 1)$ ومنه $\overline{AB}(1; 3; -1)$ و $\overline{AC}(1; -1; 0)$

$$Z = -4 \leftarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow Y = -1$$

$$X = -1$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC}(-1; -1; -4)$$

(ب) نستنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
 $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(-1; -1; -4)$ منتظمة على المستوى (ABC) ومنه $-x-y-4z+d=0$: (ABC)
و حيث أن $A(0; 1; 1) \in (ABC)$ فإن $d=5$ إذن $-x-y-4z+5=0$: (ABC)

- (2)

(أ) نبين أن (S) فلكة شعاعها $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ مع تحديد احداثيات مركزها Ω .

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + \frac{13}{2} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{9}{2}$$

إذن (S) فلكة شعاعها $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ومركزها $\Omega(1; 1; 3)$

(ب) نبين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).
لدينا $-x-y-4z+5=0$: (ABC) و $\Omega(1; 1; 3)$ مركز الفلكة (S)

$$d(\Omega; (ABC)) = \frac{|-1-1-12+5|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{9}{\sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = R$$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

تمرين 2

(u_n)_{n∈ℕ} المتتالية العددية المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- نبين أن $1 < u_n < 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ ومنه $1 < u_0 < 2$

نفترض أن $1 < u_n < 2$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n نبين أن $1 < u_{n+1} < 2$

لدينا $1 < u_n < 2$ ومنه $0 < u_n - 1 < 1$

و بالتالي $0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$ ومنه $1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2$ أي أن $1 < u_{n+1} < 2$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 < u_n < 2$

2- نبين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية و نستنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة
ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \sqrt{u_n - 1}(1 - \sqrt{u_n - 1})$$

بما أن $1 < u_n < 2$ فإن $0 < 1 - \sqrt{u_n - 1}$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية

و حيث أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مكبورة بالعدد 2 فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

3- نعتبر $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \ln(u_n - 1)$

أ- نبين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = -\ln 2$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = -\ln 2$

ب- نحدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = -\ln 2$

$$\text{ومنّه } v_n = (-\ln 2) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln 2) \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \ln(u_n - 1)$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + e^{v_n} = u_n$

$$\text{اذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + e^{v_n} = 2$$

تمرين 3

1- نتأكد أن $(2i-1)^2 = -3-4i$

$$(2i-1)^2 = -4-4i+1 = -3-4i$$

2- نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(E) \quad z^3 + 2z^2 + 4(-1+i)z + 16(1+i) = 0$

أ/ نتأكد أن -4 حل للمعادلة (E)

$$(-4)^3 + 2(-4)^2 + 4(-1+i)(-4) + 16(1+i) = -64 + 32 + 16 - 16i + 16 + 16i = 0$$

اذن -4 حل للمعادلة (E)

ب/ نحدد العددين a و b حيث $z^3 + 2z^2 + 4(-1+i)z + 16(1+i) = (z+4)(z^2 + az + b)$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad (z+4)(z^2 + az + b) = z^3 + (4+a)z^2 + (4a+b)z + 4b$$

وحيث $\forall z \in \mathbb{C} \quad z^3 + 2z^2 + 4(-1+i)z + 16(1+i) = (z+4)(z^2 + az + b)$

$$\text{ومنّه } 4+a=2 \quad ; \quad 4b=16(1+i) \quad ; \quad 4a+b=4(-1+i)$$

$$\text{اذن } a=-2 \quad ; \quad b=4(1+i)$$

ج/ نحدد z_1 و z_2 جذري المعادلة $z^2 - 2z + 4(1+i) = 0$

ليكن Δ' المميز المختصر للمعادلة $\Delta' = (-1)^2 - 4(1+i) = -3-4i = (2i-1)^2$

$$\text{ومنّه } z_1 = 1 + (2i-1) = 2i \quad \text{و} \quad z_2 = 1 - (2i-1) = 2-2i$$

د/ نستنتج حلول المعادلة (E)

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z^3 + 2z^2 + 4(-1+i)z + 16(1+i) = (z+4)(z^2 - 2z + 4(1+i))$$

$$(E) \Leftrightarrow (z+4)(z^2 - 2z + 4(1+i)) = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow z = -4 \quad \text{ou} \quad z = 2i \quad \text{ou} \quad z = 2 - 2i$$

اذن حلول المعادلة (E) هي -4 و $2i$ و $2 - 2i$

3- نكتب حلول المعادلة (E) في شكلها المثلي

$$2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[2\sqrt{2}; \frac{-\pi}{4} \right] \quad \text{و} \quad 2i = \left[2; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{و} \quad -4 = [4; \pi]$$

4- المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ ،

نبين أن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في B .
لدينا A و B و C النقطة التي ألقاها -4 و $2i$ و $2 - 2i$ على التوالي

$$\widehat{(BA; BC)} \equiv \arg \frac{2 - 2i - 2i}{-4 - 2i} \quad [2\pi]$$

$$\widehat{(BA; BC)} \equiv \arg \frac{2 - 4i}{-4 - 2i} \quad [2\pi]$$

$$\widehat{(BA; BC)} \equiv \arg \frac{i(-2i - 4)}{-4 - 2i} \quad [2\pi]$$

$$\widehat{(BA; BC)} \equiv \arg i \quad [2\pi]$$

$$\widehat{(BA; BC)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

اذن \widehat{ABC} زاوية قائمة.

$$\text{لدينا } BA = BC = \sqrt{20} \quad \text{و} \quad BA = |-4 - 2i| = \sqrt{20} \quad BC = |2 - 4i| = \sqrt{20}$$

اذن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في B .

تمرين 4

الصندوق يحتوي على 7 بياض سوداء مرقمة، أربعة بياض منها تحمل الرقم 1 و البياض الأخرى تحمل رقم 2. و ثلاث بياض بيضاء ببدقان منها تحمل الرقم 1 و البياض الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب بالتتابع و بدون إحلال ببيدين

1- نحسب احتمال الحصول على ببيدين مجموع رقميهما زوجي

نعتبر الحدث A : "الحصول على ببيدين مجموع رقميهما زوجي"

$$P(A) = \frac{A_6^2 + A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{6 \times 5 + 4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{7}{15}$$

3- نحسب احتمال الحصول على ببيدين سوداوين علما أن مجموع رقميهما زوجي.

نعتبر الحدث N : "الحصول على ببيدين سوداوين"

$$P_A(N) = \frac{P(A \cap N)}{P(A)} = \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{15}{7} \times \frac{3 \times 2 + 4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{15}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{7}$$

تمرين 5

(A) الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1$

1- نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1 \right) = 1$$

2- نبين أن $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $]0; +\infty[$ ونستنتج منحنى تغيرات g على $]0; +\infty[$

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1 \quad \text{ليكن } x \text{ من }]0; +\infty[$$

ومنه

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad g'(x) < 0 \quad \text{أي } \forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

اذن g تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$

3- نستنتج أن $g(x) > 0$ $\forall x \in]0; +\infty[$

لدينا g تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

اذن $\forall x \in]0; +\infty[\quad g(x) > 0$

(B) الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 & ; x > 0 \\ f(x) = (1-x)e^x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

1- أ/ نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ثم نستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \quad \text{نضع } x = \frac{1}{t} \text{ ومنه } t = \frac{1}{x} \text{ و بالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 = +\infty \quad \text{ومنه}$$

ب/ نحدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ونؤول النتيجة هندسياً

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - xe^x = 0$$

ومنه محور الافاصيل مقارب للمنحنى (C_f)

ج/ نبين أن f متصلة في 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln(x) + x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)e^x = 1$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ اذن f متصلة في 0.

2- ندرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 وعلى اليسار في 0 ثم نؤول النتيجة هندسياً.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1-x)e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} - e^x = 1 - 1 = 0$$

ومنه f قابلية اشتقاق على اليسار في 0 و تقبل نصف مماس أفقي على يسار في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 = +\infty$$

ومنه f غير قابلية الاشتقاق على اليمين في 0 و تقبل نصف مماس عمودي على اليمين في 0

$$-3 \text{ أ/ نبين أن } \forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = g(x) \text{ وأن } \forall x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) = -xe^x$$

$$\text{ليكن } x \in]0; +\infty[\quad f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1$$

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + 1 = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1 = g(x)$$

$$\text{ليكن } x \in]-\infty; 0[\quad f(x) = (1-x)e^x$$

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

ب/ نعطي جدول تغيرات f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

4- نبين أن النقطة A ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

$$\text{ليكن } x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) = -xe^x$$

$$f''(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

$$f''(x) \Leftrightarrow -(x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0
$f''(x)$	+	0	-

اذن النقطة A ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

اذن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

6- ننشئ المنحنى (C_f) .

R

