

الامتحان التجريبي 2004

التمرين الأول :

$$x = \ln 2 \Rightarrow t = 1 \quad \text{و} \quad x = \ln 4 \Rightarrow t = \sqrt{3} \quad (1)$$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1+t^2} = [2\text{Arctg}(t)]^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} : \quad \text{إذن} \quad dx = \frac{2t dt}{1+t^2} \quad \text{ومنه} \quad t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow x = \ln(1+t^2)$$

$$J = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \Leftarrow \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)] \quad \text{و} \quad J = [x\text{Arctg}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (2)$$

التمرين الثاني :

أ (1)

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$	$\frac{C_2^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{2}{10}$	$\frac{C_2^2 + C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{3}{10}$	$\frac{C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{2}{10}$

$$. \quad p(A) = \frac{C_2^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{10} \quad \text{ب-}$$

$$. \quad p(A \cap (X = 2)) = \frac{1}{10} \quad \text{إذن} \quad \text{ج- الحدث } A \cap (X = 2) \text{ هو " سحب بيدقتين تحملان الرقم 1" ،}$$

$$\text{و لدينا } p(A)p(X = 2) = \frac{3}{50} \quad \text{، إذن الحدثان } (X = 2) \text{ و } A \text{ غير مستقلين } \left(\frac{1}{10} \neq \frac{3}{50}\right)$$

$$. \quad p = \frac{13}{125} \quad \text{إذن} \quad p = C_3^2 [p(A)]^2 [1 - p(A)] + C_3^3 [p(A)]^3 \quad \text{لدينا} \quad (2)$$

التمرين الثالث :

$$. \quad z'' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \quad \text{و} \quad z' = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \Leftarrow \Delta = -4i = 2(1-i)^2 \quad (1)$$

$$|z''| = \sqrt{\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad (2)$$

$$. |z'| = \sqrt{\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$. \quad z'+1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \left[1, \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{و} \quad \left(\frac{c}{a}\right) \text{ جذاء جذري } az^2 + bz + c \text{ يساوي} \quad (3)$$

$$z' = -1 + \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftarrow z'+1 = \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{لدينا} \quad (4)$$

إذن $(\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ و $\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$) $z' = -2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 2i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

يعني $z' = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$ ومنه $\boxed{\text{Arg}(z') = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}}$

من جهة أخرى ، $z'z'' = 1 + i$ ، $\text{Arg}(z'z'') = \frac{\pi}{4}$

يعني $\text{Arg}(z') + \text{Arg}(z'') = \frac{\pi}{4}$ إذن $\boxed{\text{Arg}(z'') = -\frac{5\pi}{8}}$

التمرين الرابع:

(1) $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \vec{AB}(-4,1,1)$ و $\vec{AC}(-2,0,1)$

$(ABC): x + 2y + 2z + d = 0$ إذن (ABC) منظمية على $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

$(ABC): x + 2y + 2z + 2 = 0$ و بالتالي $d = 2 \Leftrightarrow C \in (ABC)$

(2) لدينا $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$ إذن $r = 3$ و $\Omega(1,1,2)$

(3) $(ABC) \Leftrightarrow d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1+2+4+2|}{\sqrt{9}} = 3 = r$ مماس للفلكة (S)

$H(a,b,c)$ نقطة التماس هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega(1,1,2)$ على (ABC) ، إذن :

$$H(0,-1,0) \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = 1+t \\ b = 1+2t \\ c = 2+2t \\ a+2b+2c+2 = 0 \end{cases}$$

مسألة :

-I

(1) أ- $f(-1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ إذن f متصلة في -1 .

ب- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} = -\infty$ إذن f غير قابلة للاشتقاق في -1^+

C_f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(-1,0)$ على اليمين .

ث- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}}$ إذن f قابلة للاشتقاق في -1^-

C_f يقبل نصف مماس معامله الموجه $2e^{-\frac{1}{2}}$ في النقطة $A(-1,0)$ على اليسار .

ج- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt[3]{x+1} = +\infty$

C_f يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتايب بجوار $+\infty$.

د- $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} + 2 \cdot \frac{-x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ (ضع $t = \frac{-x^2}{2}$)

SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

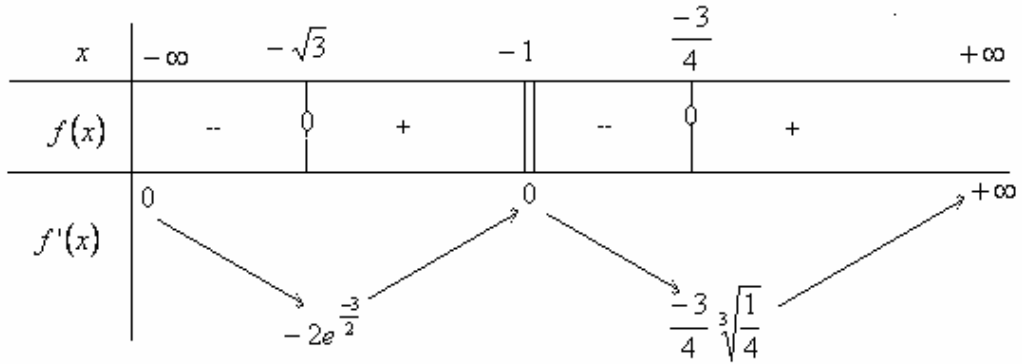
C_f يقبل محور الأفاصيل كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$.

(2) أ- إذا كان $x > -1$: $f'(x) = \sqrt[3]{x+1} + \frac{x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x+1} + x \left[\frac{1}{3} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \right]$

يعني $f'(x) = \frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

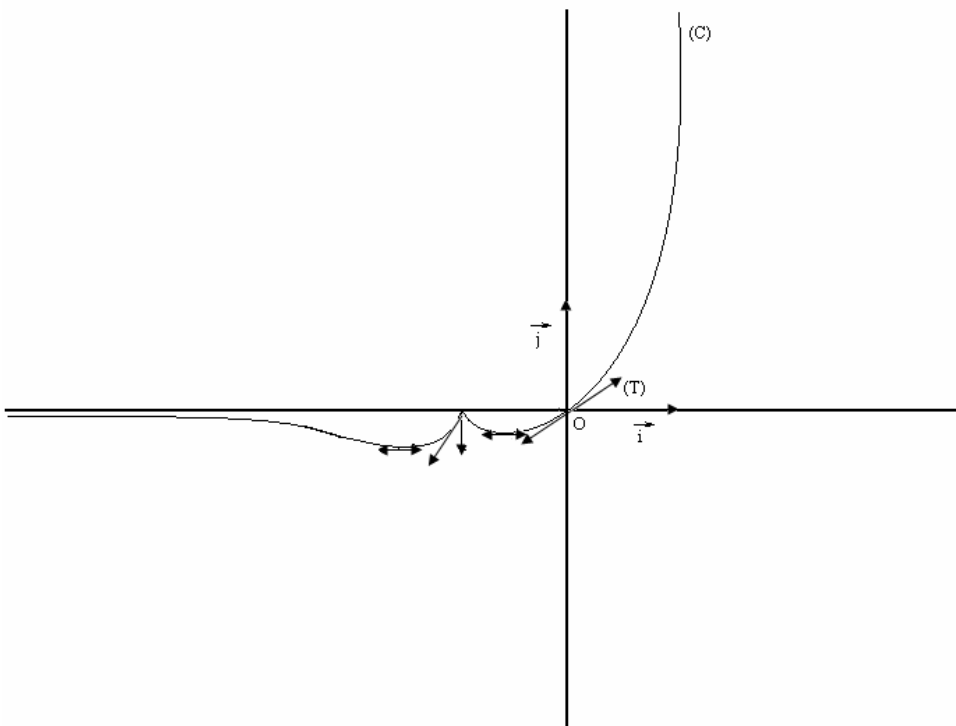
إذا كان $x < -1$: $f'(x) = x(x^2-3)e^{\frac{-x^2}{2}} \Leftrightarrow f'(x) = -2xe^{\frac{-x^2}{2}} + (1-x^2) \left(-xe^{\frac{-x^2}{2}} \right)$

ب-



(3) لكل x من $[-1, +\infty[$ لدينا $f(x) - x = x \left(\sqrt[3]{x+1} - 1 \right) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} \geq 0$

(4) أ- $(T): y = f'(0)x + f(0)$ يعني $(T): y = x$ ب- المنحنى :



-II

$$(1) \text{ لدينا } U_0 \in [-1, +\infty[\text{ نفترض أن } U_n \in [-1, +\infty[\text{ إذن } h(U_n) \in h([-1, +\infty]) = \left[-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, +\infty \right]$$

يعني $U_{n+1} \in [-1, +\infty[$ ، وبالتالي $\forall n \geq 0 U_n \in [-1, +\infty[$
 حسب السؤال 3 من الجزء الأول ، وبوضع $x = U_n$ نجد $U_{n+1} = h(U_n) \geq U_n$ إذن (U_n) تزايدية.
 (2) أ- من أجل $n = 0 : -1 \leq U_0 < 0$ ، نفترض أن $-1 \leq U_n < 0$.

$$\text{لدينا إذن } U_n \in [-1, 0[\text{ يعني } h(U_n) \in h([-1, 0]) = \left[-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, 0 \right]$$

$$\text{إذن } \forall n \geq 0 U_n \in [-1, 0[$$

ب- (U_n) تزايدية ومكبورة ب0 إذن فهي متقاربة.

نضع $I = [-1, 0[$. h متصلة على I و $h(I) \subset I$ و (U_n) متقاربة، إذن نهايتها l تحقق $h(l) = l$.

$$\text{أي } l(1 - \sqrt[3]{l+1}) = 0 \text{ ومنه } l = 0$$

(3) أ- لدينا $U_{n+1} - U_n = U_n(\sqrt[3]{1+U_n} - 1)$ و $U_n \geq U_0$ و (U_n) تزايدية) ، إذن (وبما أن $U_0 > 0$)

$$\text{نجد } U_{n+1} - U_n \geq U_0(\sqrt[3]{1+U_0} - 1) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ب- من أجل $n = 0 : U_0 \geq U_0$ (العلاقة محققة) . نفترض أن $U_n \geq U_0 + n\lambda$

$$\text{و لدينا } U_{n+1} \geq U_n + \lambda \text{ إذن } U_{n+1} \geq U_0 + n\lambda + \lambda \text{ أي } U_{n+1} \geq U_0 + (n+1)\lambda$$

إذن $U_n \geq U_0 + n\lambda$ لكل n من \mathbb{N} .

$$\text{ج- لدينا } \lambda > 0 \text{ إذن } \lim U_0 + n\lambda = +\infty \text{ ومنه } \lim U_n = +\infty$$