التمرين الأول:

1- تمثيل بارا متري للمستقيم (D) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \quad (t \in IR) \\ z = 1-t \end{cases}$

2- لتحديد احداثيات النقطة B نحل النظمة: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$

ومنه $(1+t)+(-1+t)-(1-t)-2=0$

أي $t=1$ وبالتالي احداثيات نقطة التقاطع هي $B(2,0,0)$.

3- أ معادلة ديكارتية للفلكة (S) هي :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{7})^2$$

أي $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4=0$

3- ب لدينا $d(A,(P)) = \dfrac{|1-1-1-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < \sqrt{7}$

ومنه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة

مركزها: هو المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) أي تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) أي النقطة B .

شعاعها: $r' = \sqrt{r^2-d^2} = \sqrt{7-3} = 2$.

4 - معادلة ديكارتية لمستوى (Q) موازي للمستوى (P) تكتب على شكل $x+y-z+d=0$.

المستوى (Q) مماس للفلكة (S) يكافئ $d(A,(Q))=2$

ولدينا : $d(A,(Q))=2 \Leftrightarrow \dfrac{|1-1-1+d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1+d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow |-1+d| = \sqrt{21}$$

$$\Leftrightarrow -1+d = \sqrt{21} \text{ أو } -1+d=-\sqrt{21}$$

$$\Leftrightarrow d = 1+\sqrt{21} \text{ أو } d = 1-\sqrt{21}$$

و منه معادلتي المستويين الموازيين للمستوى (P) والمماسين للفلكة (S) هما : $x+y-z+1+\sqrt{21}=0$

و $x+y-z+1-\sqrt{21}=0$

التمرين الثاني :

لدينا : $P(z) = z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$

1- أ- لدينا $P(2) = 2^3-2(2+3i)2^2-4(1-5i)2+16(1-i)$

$$= 8-8(2+3i)-8(1-5i)+16(1-i)$$
$$= 8(1-2-3i-1+5i+2-2i)$$
$$= 0$$

ومنه $z_0 = 2$ جذر للحدودية P .

1- ب لدينا : $P(z) = (z-2)(z^2+az+b)$

$$= z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=-2(2+3i) \\ b-2a=-4(1-5i) \\ -2b=16(1-i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-2(2+3i) = -2(1+3i) \\ b=-8(1-i) \end{cases}$$

وبالتالي : $P(z) = (z-2)(z^2-2(1+3i)z-8(1-i))$

1- ج لدينا :

$$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2-2(1+3i)z-8(1-i))=0$$

$$\Leftrightarrow z-2=0 \text{ أو } z^2-2(1+3i)z-8(1-i)=0$$

$$\Leftrightarrow z=2 \text{ أو } z^2-2(1+3i)z-8(1-i)=0 \quad (*)$$

لنحل المعادلة $(*)$:

لدينا : $\Delta' = b'^2-ac = (1+3i)^2+8(1-i) = -2i = (1-i)^2$

ومنه : $z_1 = (1+3i)+(1-i) = 2+2i$

و $z_2 = (1+3i)-(1-i) = 4i$

وبالتالي $S = \{2, 2+2i, 4i\}$

2- لدينا $z_0z_2 = 8i$ و $z_1{}^2 = (2+2i)^2 = 8i$ أي $z_0z_2 = z_1{}^2$

إذن z_0 و z_1 و z_2 حدود متتابعة من متتالية هندسية .

وبما أن $u_0 = z_0$ فإن $u_1 = z_1$ وبالتالي $q = \dfrac{z_1}{z_0} = 1+i$

و $u_{16} = u_0q^{16} = 2(1+i)^{16} = 2(2i)^8 = 2^9 i^8 = 2^9$

3- النقطة G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$

يعني $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

يكافئ $(z_A-z_G)-(z_B-z_G)+(z_C-z_G)=0$

يكافئ $z_G = z_A-z_B+z_C$

يكافئ $z_G = 2i$

التمرين الثالث:

1- لدينا $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

ومنه $I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$

أي $I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \left[-e^{-x}\right]_0^1$

بالتالي $I_1 = 1-\dfrac{2}{e}$

2- لكل $n \in IN^*-\{1\}$ لدينا $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=x^n \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=nx^{n-1} \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

ومنه $I_n = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$

أي $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{e}$

2-ب حسب العلاقة الأخيرة لدينا

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2(1-\frac{2}{e}) - \frac{1}{e}$$

أي $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$

و $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3(2-\frac{5}{e}) - \frac{1}{e}$

أي $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$

2- ج لدينا: $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2)e^{-x}dx = \int_0^1 (2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x})dx$

$$= 2\int_0^1 x^3e^{-x}dx - 4\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

$$= 2I_3 - 4I_2$$

$$= 2(6-\frac{16}{e}) - 4(2-\frac{5}{e})$$

$$= 4(1-\frac{3}{e})$$

3-أ لدينا : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx$

و بما أن الدالة $x->x^n(x-1)e^{-x}$ سالبة على المجال $[0,1]$

فإن $\int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx < 0$ و منه المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية.

ولدينا لكل $n \in IN^*$ الدالة $x->x^n e^{-x}$ موجبة على المجال $[0,1]$

إذن $\int_0^1 x^n e^{-x}dx > 0$ أي $I_n > 0$

ومنه المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ مصغورة بالعدد 0 .

3-ب بما أن المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة .

3- ج لدينا على المجال $[0,1]$ $e^{-x} \le 1$

ومنه $x^n e^{-x} \le x^n$ لكل $n \in IN^*$

و بالتالي $\int_0^1 x^n e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n dx$

أي $I_n \le \frac{1}{n+1}$

بما أن $0 < I_n \le \frac{1}{n+1}$ و $\lim_{x->+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

فإن $\lim_{n->+\infty} I_n = 0$.

المسألة :

الجزء الأول:

1- لدينا $\lim_{x->0^+} g(x) = \lim_{w->0^+} x+1-\ln(x) = +\infty$

و $\lim_{x->+\infty} g(x) = \lim_{x->+\infty} x+1-\ln(x)$

$$= \lim_{x->+\infty} x(1+\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x})$$

$$= +\infty$$

2- لكل x من IR^{*+} لدينا $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على المجال $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

3- لدينا 2 قيمة دنيا للدالة g أي أن لكل x من IR^{*+} $g(x) \ge 2$

و بالتالي لكل x من IR^{*+} $g(x) > 0$.

الجزء الثاني :

1- لدينا $\lim_{x->0^+} f(x) = \lim_{x->0^+} e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = 0$

ومنه $\lim_{x->0^+} f(x) = f(0)$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 .

لدينا $\lim_{x->+\infty} f(x) = \lim_{x->+\infty} e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = +\infty$

2- أ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا :

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = e^{\ln(x)+\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\ln(x)}e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

$$= xe^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

وبالتالي $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$

2- ب لدينا :

$$\lim_{x->0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x->0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0

تأويل هندسي : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس أفقي في النقطة o أصل المعلم.

2- ج لدينا : $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$

2- د لدينا : $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)} = \lim_{x->+\infty} \frac{xe^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{\ln(x)}$

$$= \lim_{x->+\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1)}{\ln(x)}$$

$$= \lim_{x->+\infty} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}}$$

نضع : $t = \frac{\ln(x)}{x}$

لدينا : $x->+\infty \Rightarrow t->0$

ومنه $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)} = \lim_{t->0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

استنتاج: $\lim_{x->+\infty} f(x) - x = \lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)}\ln(x) = +\infty$

منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$

3- لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x) = (e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)})'$

$$= (\frac{x+1}{x}\ln(x))' e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)}$$

$$= ((\frac{x+1}{x})'\ln(x) + \frac{x+1}{x}\ln'(x)) f(x)$$

$$= (\frac{-1}{x^2}\ln(x) + \frac{x+1}{x^2}) f(x)$$

$$= \frac{x+1-\ln(x)}{x^2} f(x)$$

$$= \frac{g(x)}{x^2} f(x)$$

وبما أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (حسب س 3 من ج 1)

فإن $f'(x) \geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

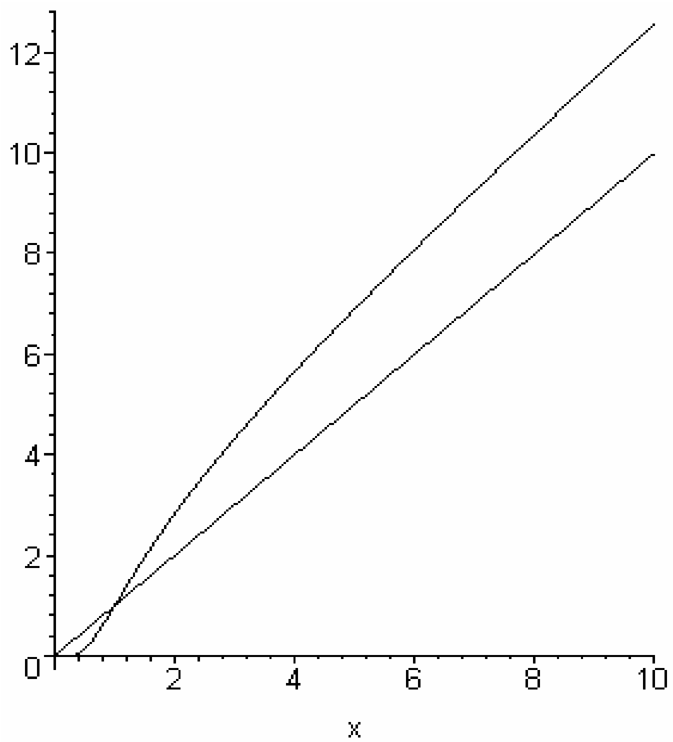
4-أ حساب $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$

$$f(1) = e^{\frac{1}{2}\ln(1)} = e^0 = 1$$

$$f(2) = e^{\frac{3}{2}\ln(2)} = e^{\ln(2^{\frac{3}{2}})} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$f(3) = e^{\frac{4}{3}\ln(3)} = e^{\ln(3^{\frac{4}{3}})} = 3^{\frac{4}{3}}$$

4-ب منحنى الدالة f .



الرسم تم باستعمال Logiciel Maple 9.5

5-أ بما أن الدالة g متصلة و موجبة على المجال $[1,\lambda]$ حيث $\lambda > 1$

(أنظر الجزء 1) فإن: $A(\lambda) = \int_1^{\lambda} g(x)dx.ua$

$$= \int_1^{\lambda} (x+1-\ln(x))dx.ua$$

$$= (\int_1^{\lambda}(x+1)dx - \int_1^{\lambda}\ln(x)dx).ua$$

$$= ([\frac{1}{2}x^2 + x]_1^{\lambda} - [x\ln(x) - x]_1^{\lambda}).ua$$

$$= [\frac{1}{2}x^2 + x - x\ln(x) + x]_1^{\lambda}.ua$$

$$= [\frac{1}{2}x^2 + 2x - x\ln(x)]_1^{\lambda}.ua$$

$$= (\frac{1}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \lambda\ln(\lambda) - \frac{5}{2}).ua$$

5- ب $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} (\frac{1}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \lambda\ln(\lambda) - \frac{5}{2}).ua$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2(\frac{1}{2} + \frac{2}{\lambda} - \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} - \frac{5}{2\lambda^2}).uv$$

$$= +\infty$$

الجزء الثالث:

1- لنبين بالترجع أن $1 \leq u_n < e \quad \forall n \in IN$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ أي $1 \leq u_0 < e$

ليكن n من IN نفترض أن $1 \leq u_n < e$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < e$

لدينا g دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$ (أنظر س2من الجزء1)

ومنه $g(1) \leq g(u_n) < g(e)$ وهذا يعني $2 \leq u_{n+1} < e$

وبالتالي $1 \leq u_{n+1} < e$

وحسب مبدأ الترجع $1 \leq u_n < e \quad \forall n \in IN$.

2- لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية

لكن n من IN لدينا : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

$$= u_n + 1 - \ln(u_n) - u_n$$

$$= 1 - \ln(u_n)$$

وبما أن $u_n < e$ فإن $\ln(u_n) < \ln(e)$ أي $\ln(u_n) < 1$

و بالتالي $1 - \ln(u_n) > 0$

ومنه المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

3- بما أن المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد e فهي متقاربة.

لدينا g متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

ومنه g متصلة على المجال $[1,e]$ لأن $[1,e] \subset]0,+\infty[$

و تزايدية على المجال $[1,e]$ لأن $[1,e] \subset [1,+\infty[$

وبالتالي : $g([1,e]) = [2,e] \subset [1,e]$.

وبما أن (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق المعادلة $g(l) = l$

ولدينا $g(l) = l \Leftrightarrow l + 1 - \ln(l) = l$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln(l) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(l) = 1$$

$$\Leftrightarrow l = e$$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = e$