I. الاشتقاق في نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:

01. تعريف (تذكير) :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و $\ell \in \mathbb{R}$ نقول أن : الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كان: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ أو أيضا: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell$ العدد ℓ يسمى العدد المشتق ل f في x_0 و يرمز له ب : $f'(x_0)$

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

02. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $(T):y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$
- كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0 . (العكس ليس دائما صحيح) .
- تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي a و توجد دالة ε حيث : $f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ $\forall x\in D_f\setminus\{x_0\}$ مع $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. (و في هذه الحالة $f'(x_0)=a$).

03. الدالة التآلفية h ل f بجوار x_0:

- تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

الدالة h المعرفة ب: $h(x)=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة ل f بجوار x_0 .

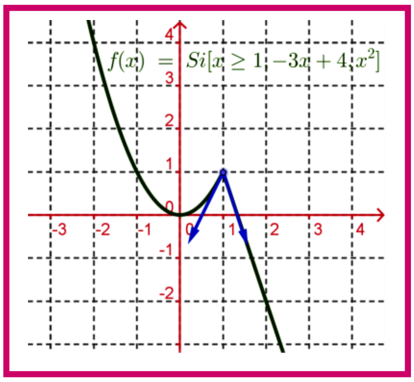
نكتب $f(x)\approx h(x)$ بجوار x_0 (أي h تقريب ل f بجوار x_0)

04. ملحوظة :

منحنى الدالة h هو المستقيم (T) المماس لمنحنى f في النقطة التي أفصولها x_0

05. نشاط 2 :

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=-3x+4 & ;x\geq 1\\ f(x)=x^2 & ;x<1\end{cases}$



1. أدرس اشتقاق f على يمين $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
2. أدرس اشتقاق f على يسار $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
3. هل f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلتي نصفي المماس لمنحنى الدالة f على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول $x_0=1$.

الجواب

بطريقة مبيانيا

ملاحظة: النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$ تسمى نقطة مزواة .

06. تعريف: (الاشتقاق على يمين x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0, x_0+\alpha[$ ، $(\alpha > 0)$

f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_d = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$

العدد $f_d'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين x_0 ل f.

07. تعريف: (الاشتقاق على يسار x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-\alpha, x_0]$ ، $(\alpha > 0)$

f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_g = f_g'(x_0) \in \mathbb{R}$. العدد $f_g'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسا x_0

08. خاصية:

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0.
- f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0.
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في x_0 .أي $(f_d'(x_0) = f_g'(x_0))$.

09. تمرين تطبيقي :

أدرس اشتقاق f في x_0 : 1) $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $x_0 = 0$ على اليمين . 2) $f(x)=|x-1|$ على يمين و على يسار $x_0 = 1$

II. اشتقاق دالة على مجال – الدالة المشتقة الأولى لدالة:

01. تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من $]a,b[$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$.
- f دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b[$ إذا كانت
  - الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$
  - f قابلة للاشتقاق على اليمين في a .

02. الدالة المشتقة للدالة:

- تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر x_0 من المجال I بالعدد $f'(x_0)$ تسمى الدالة المشتقة ل f و نرمز لها ب f'

- ملحوظة :

إذا كان : $I=[a,b]$ و $I=[a,b[$ و $I=]a,b[$ نصطلح ان : $f'(a)=f_d'(a)$ و $f'(b)=f_g'(b)$

- مثال : الدالة المشتقة ل $f(x)=x^3$ على $\mathbb{R}$ هي $f'(x)=3x^2$.

III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول 1)

الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f'
a	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$D_f=\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
x	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$-\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
x^n $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و $c\neq 0$	$\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و $c\neq 0$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$1+\tan^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: (الجدول 2)

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I.

الدالة	مشتقتها	شرط	الدالة	مشتقتها	شرط
$f+g$	$(f+g)'=f'+g'$		$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I
$\alpha\times f$	$(\alpha\times f)'=\alpha\times f'$	$\alpha\in\mathbb{R}$	f^n	$(f^n)'(x)=n\times(f(x))^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{N}^*$
$f\times g$	$(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$		f^n	$(f^n)'(x)=n\times(f(x))^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{Z}^{-*}$ و f لا تنعدم على I
$\frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I	$\sqrt{g(x)}$	$\left(\sqrt{g(x)}\right)'=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	g موجبة وقابلة للاشتقاق

02. أمثلة: أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$. ب- $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-1}$. ج- $f(x)=2x\cos x$. د- $f(x)=1+(3x+2)^4$.

V. الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f.

1. مفردات :

- المشتقة ل f' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرمز لها ب : $(f'(x))'=f''(x)=f^{(2)}(x)$.
- إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $\left(f^{(2)}\right)'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرمز لها ب $\left(f^{(2)}\right)'=f^{(3)}$

2. بصفة عامة :

المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$) هي المشتقة ل $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة n-1) $(f^{(n-1)}(x))$ ونرمز لها ب:
$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)$

3. مثال:

أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث : أ - $f(x)=x^5$ ب - $f(x)=\frac{1}{x^2}$. ج – بين أن : $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية

01. مشتقة مركب دالتين :

1) مبرهنة 1 :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.
و لدينا: $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$.

2) مبرهنة 2 :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على I و $f(I)$ على التوالي
إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق في $f(I)$ فإن الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I .
و لدينا: $\forall x\in I:(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$.

3) نتائج : (الجدول 3)

مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x)=$
$D_{f'}=\mathbb{R}$	$-a\times\sin(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos(ax+b)$	$x\in D_{g'}$ و $g(x)>0$	$\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_g$ و $g(x)\geq 0$	$\sqrt{g(x)}$
$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$a\times\left[1+\tan^2(ax+b)\right]$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\tan(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$a\times\cos(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$\sin(ax+b)$

4) مثال:

أحسب $f'(x)$ مع أ - $f(x)=\sqrt{x^2-x}$. جواب : $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

ب - $f(x)=\cos(2x-4)$.جواب : $f'(x)=(\cos(2x-4))'=(2x-4)'\cos'(2x-4)=-2x\sin(2x-4)$

02. مشتقة الدالة العكسية

1) مبرهنة 1 :

لتكن f متصلة و رتيبة قطعا على I (لإذن الدالة f تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$).
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)=y_0$
لدينا: $(f^{-1})'(y_0)=(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

2) برهان :

بمأن f متصلة على I إذن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $J=f(I)$ و منه لكل y_0 من J لدينا $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$.
ندرس اشتقاق f^{-1} في y_0 من J . نضع $f^{-1}(y)=x$ و $f^{-1}(y_0)=x_0$ مع x و x_0 من I . لدينا :

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}\in\mathbb{R}\ ;\ (f'(x_0)\neq 0)$$

$$=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\ ;\ (f^{-1}(y_0)=x_0)$$

$$=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(y_0)}$$

خلاصة : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0=f(x_0)$ من $J=f(I)$ حيث : $(f^{-1})'(y_0)=(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

3) مبرهنة 2 :

لتكن f دالة تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على I (أي $\forall x\in I\ ;\ f'(x)\neq 0$) فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق المجال $J=f(I)$. لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

4) تطبيق 1 : مشتقة: $\sqrt[n]{x}$ و x^r و $g(x)=[f(x)]^r$. (الجدول 4)

$n\in\mathbb{N}^*$ و $r\in\mathbb{Q}^*$ و f موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على I		
$g(x)=\sqrt[n]{x}$	$g'(x)=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
$g(x)=x^r$	$g'(x)=(x^r)'=rx^{r-1}$	
$g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$	$g'(x)=\frac{1}{n}\times f'(x)\times(f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	g قابلة للاشتقاق على I
$g(x)=[f(x)]^r$	$g'(x)=([f(x)]^r)'=r\times f'(x)\times[f(x)]^{r-1}$	

- أمثلة: أحسب f' مع:

$.f(x)=\sqrt[5]{x}$ ، $.f(x)=\sqrt[5]{x^2+1}$ ، $f(x)=\sqrt[5]{(x^2+1)^7}$

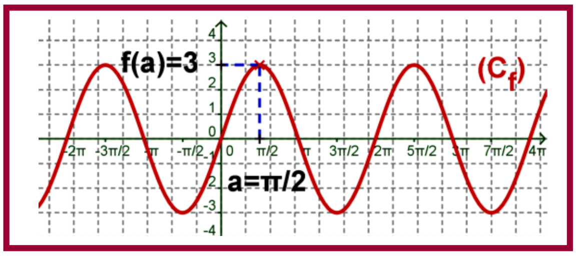
جواب :

- $\left[f(x)=\sqrt[5]{x}\right]'=\left[x^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
- $\left[f(x)=\sqrt[5]{(x^2+1)}\right]'=\left[(x^2+1)^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{14}{7}x(x^2+1)^{\frac{4}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{(x^2+1)^4}$
- $.\left[f(x)=\sqrt[5]{(x^2+1)^7}\right]'=\left[(x^2+1)^{\frac{7}{5}}\right]'=\frac{7}{5}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{7}{5}-1}=\frac{14}{7}x(x^2+1)^{\frac{2}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{(x^2+1)^2}$

VII. تطبيقات الدالة المشتقة :

A. مطارف دالة عددية قابلة للاشتقاق.

1. نشاط:



المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I.

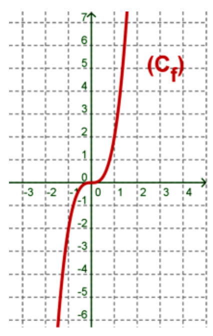
1) هل f تقبل مطراف في a ؟
2) أعط قيمة ل $f'(a)$. ثم أعط الخاصية.

2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a)=0$.

3. ملحوظة : إذا كان $f'(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $f(a)$ مطراف للدالة f.

4. مثال :



$f(x)=2x^3$: لدينا $f'(x)=6x^2$ ومنه : $f'(0)=0$. ولكن $f(0)$ ليس مطراف ل f.

5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I
إذا كانت f' تنعدم في النقطة a و تتغير إشارتها بجوار a فإن $f(a)$ مطراف ل f.

B. إشارة المشتقة الأولى و رتابة دالة :

1. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

- إذا كانت $\forall x\in I : f'(x)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I. I(يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f)
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I. (نفس الشيء يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I)
- إذا كان $\forall x\in I : f'(x)=0$ (على I بكامله) فإن f ثابتة على I.

2. مثال :

- أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}$ مع $f(x)=(2x+4)^2$.

- هل الدالة f تقبل مطراف .

جواب :

- ندرس تغيرات الدالة f

1) حساب f':

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(2x+6)^4\right]' \\ &= 4(2x+6)'(2x+6)^3 \\ &= 4\times 2(2x+6)^3 \\ &= 8(2x+6)^3 \end{aligned}$$

2) إشارة f' :

إشارة f' هي إشارة $2x+6$

و منه :

$$\begin{aligned} f'(x)\geq 0 &\Leftrightarrow 2x+6\geq 0 \\ &\Leftrightarrow x\geq -3 \end{aligned}$$

إذن : f' موجبة على $[-3,+\infty[$ و سالبة على $]-\infty,-3]$ ومنه جدول تغيرات f .

3) تغيرات الدالة f بواسطة الجدول التالي :

لدينا : $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty}(2x+6)^4 = \lim\limits_{|x|\to\infty}(2x)^4 = +\infty$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	$+\infty$		$+\infty$
f	↘	$f(-3)=0$	↗

- مطاريف الدالة f :

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن الدالة f تقبل قيمة دنيا في النقطة التي أفصولها $x_0=-3$