الإشتِقاق

1) اشتقاق دالة في عدد : تعاريف و تأويلات هندسية

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليسار	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_g'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_g'(a)$ و معادلته : $y=f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a)=f_g'(a)=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

- **إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a)\neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة**

- **إذا كانت $f'(a)=0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$**

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

2) اشتقاق دالة على مجال

خاصيات

- ✓ إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على I و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha.f$ و $f+g$ و $f \times g$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ بالإضافة إذا كانت $g \neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و $f \geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f^n $(n \in \mathbb{N})$ قابلة للاشتقاق على I

الدالة	الدالة المشتقة
$\alpha.f$	$\alpha.f'$
$f+g$	$f'+g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\ln\lvert U\rvert$	$\frac{U'}{U}$
e^U	$U'e^U$

❖ مشتقات الدوال الاعتيادية

المجال I	الدالة المشتقة f'	الدالة f
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$

خاصية : مشتقة الدالة العكسية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} و ليكن x_0 و y_0 عددان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت $f'(y_0) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)}$

إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

خاصية

- ❖ **الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا :** $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- ❖ **إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $(\forall x \in I) \quad f(x) > 0$ فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :** $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \dfrac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$

رتابة دالة

- ✓ **إذا كانت** $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ **فإن** f **تزايدية على** I
- ✓ **إذا كانت** $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ **فإن** f **تناقصية على** I
- ✓ **إذا كانت** $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ **فإن** f **تزايدية قطعا على** I
- ✓ **إذا كانت** $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ **فإن** f **تناقصية قطعا على** I

خاصية

- ✓ **إذا كانت** $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ **و كانت** f' **تنعدم في عدد منته من النقط على** I **فإن** f **تزايدية قطعا على** I
- ✓ **إذا كانت** $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ **و كانت** f' **تنعدم في عدد منته من النقط على** I **فإن** f **تناقصية قطعا على** I