

## الإشتقاق

## 2 ع ت

## 1. قابلية اشتقاق دالة في عدد

إذا كان:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$  فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق

في  $a$  ومنحناها يقبل نصف مماس مواز لمحور الأرتاب .

إذا كان  $f'_d(a) \neq f'_g(a)$  فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $a$

ومنحناها يقبل نصف مماس ليس لهما نفس الحامل .

في هذه الحالة  $A(a, f(a))$  تسمى نقطة مزواة

## تأويلات هندسية



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

0

 $l \in R^*$  $+\infty$ 

$f$  ق ش على اليمين  
في  $a$  ومنحنى  $f$  يقبل  
نصف مماس أفقي على  
اليمين  $M(a, f(a))$

$f$  ق ش على اليمين  
في  $a$  ومنحنى  $f$  يقبل  
نصف مماس مائل على  
اليمين  $M(a, f(a))$

$f$  غير ق ش على اليمين في  $a$   
ومنحنى  $f$  يقبل نصف مماس  
عمودي على اليمين النقطة  
في  $M(a, f(a))$

## ج. مشتقة المركبة . مشتقة الدالة العكسية :

## خاصية : مشتقة المركبة في نقطة

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $g$  دالة معرفة على مجال  $J$  بحيث

$f(I) \subset J$  . ليكن  $a$  عنصرا من  $I$  .

إذا كانت الدالة  $f$  ق ش في  $a$  و الدالة  $g$  ق ش في  $f(a)$

فإن :  $g \circ f$  ق ش في  $a$  و لدينا :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

## خاصية : مشتقة المركبة على مجال

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $g$  دالة معرفة على مجال  $J$  بحيث

$f(I) \subset J$  .

إذا كانت الدالة  $f$  ق ش على  $I$  و الدالة  $g$  ق ش على  $J$

فإن  $g \circ f$  ق ش على  $I$  ولكل  $x$  من  $I$  :  $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

## خاصية :

لتكن  $f$  دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال  $I$  .

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في عدد  $a$  و  $f'(a) \neq 0$  فإن الدالة

$f^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $b = f(a)$  و لدينا  $f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}$

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه عدد  $a$  .

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  إذا كان :  $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in R$

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق للدالة  $f$  في  $a$  , ويكتب  $f'(a)$  .

وفي هذه الحالة لدينا :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

## 2- قابلية اشتقاق دالة على اليمين و على اليسار في عدد :

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال من النوع  $[a, a + \epsilon[$  حيث  $\epsilon > 0$  .

$f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $a$  إذا كان :  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in R$

هذه النهاية , عندما تكون منتهية , تسمى العدد المشتق للدالة  $f$  على

اليمين في  $a$  ونرمز له بالرمز :  $f'_d(a)$  .

بطريقة مماثلة نعرف قابلية اشتقاق دالة على اليسار في عدد .

نرمز للعدد المشتق للدالة  $f$  في العدد  $a$  بالرمز :  $f'_g(a)$  .

## خاصية :

تكون دالة  $f$  قابلة للاشتقاق في عدد  $a$  إذا وفقط إذا كانت قابلة

للاشتقاق على اليمين في  $a$  و قابلة للاشتقاق على اليسار في  $a$

$$f'_d(a) = f'_g(a)$$

بتعبير آخر :  $(f \text{ قابلة للاشتقاق في } a) \Leftrightarrow (f'_d(a) = f'_g(a))$  .

## خاصية : الاشتقاق والاتصال

كل دالة قابلة للاشتقاق في عدد  $a$  تكون متصلة في العدد  $a$  .

انتبه ! العكس غير صحيح . ( اعتبر الدالة  $|x|$  )

## قابلية اشتقاق دالة على مجال

تكون دالة  $f$  ق ش على مجال  $]a, b[$  إذا كانت ق ش في جميع نقطه .

تكون  $f$  ق ش على  $]a, b[$  إذا كانت ق ش على  $]a, b[$  وعلى اليمين في  $a$

تكون  $f$  ق ش  $]a, b[$  إذا كانت ق ش على  $]a, b[$  وعلى اليسار في  $b$  .

ملاحظة : نعرف بالمثل قابلية اشتقاق دالة على باقي أنواع المجالات .

## مماس منحني دالة - نصف مماس منحني دالة

إذا كانت دالة  $f$  قابلة للاشتقاق في عدد  $a$  فإن منحناها يقبل مماسا في

النقطة  $M(a, f(a))$  معادلته  $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

ملاحظة : العدد  $f'(a)$  هو المعامل الموجه للمماس في  $a$  .

إذا كانت  $f$  ق ش على اليمين في  $a$  فإن منحناها يقبل نصف مماس على

اليمين في النقطة  $M(a, f(a))$  معادلته :  $\begin{cases} y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$

إذا كانت  $f$  ق ش على اليسار في  $a$  فإن منحناها يقبل نصف مماس على

اليمين في  $M(a, f(a))$  معادلته :  $\begin{cases} y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$

## الإشتقاق

## 2 عت

ليكن  $T$  عددا حقيقيا موجبا قطعاً. و  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$ .

نقول إن  $f$  دورية و  $T$  دور لها إذا كان:  $(\forall x \in D) : \begin{cases} x \pm T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

6. مشتقات الدوال الاعتيادية والعمليات :

الدالة $f$	الدالة المشتقة	حين تعريف الدالة المشتقة
$c$	$0$	$\mathbf{R}$
$ax$	$a$	$\mathbf{R}$
$x^n$ $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$	$n x^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$x^r$ $n \in \mathbf{Z} - \{-1\}$	$r x^{r-1}$	$R_-^*$ أو $R_+^*$
$\sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$R_+^*$
$x^r$ $r \in \mathbf{Q}^*$	$r x^{r-1}$	$R_+^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$R_-^*$ أو $R_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$R_+^*$
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$	$\mathbf{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$	$\mathbf{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	على كل مجال ضمن $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / \pi \in \mathbf{Z} \right\}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$R_-^*$ أو $R_+^*$
$e^x$	$e^x$	$\mathbf{R}$
$\alpha u$	$\alpha u'$	حيث تكون $u$ ق ش
$u + v$	$u' + v'$	حيث تكون $u$ و $v$ ق ش
$u \cdot v$	$u'v + uv'$	حيث تكون $u$ و $v$ ق ش
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	حيث تكون $u$ و $v$ ق ش و $v$ لا تنعدم
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	حيث تكون $u$ ق ش و لا تنعدم
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	حيث تكون $u$ ق ش و موجبة قطعاً
$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	حيث تكون $u$ ق ش و موجبة قطعاً
$u^n$ $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$	$nu^{n-1} \cdot u'$	حيث تكون $u$ ق ش
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$	حيث تكون $u$ ق ش و لا تنعدم
$e^u$	$u' e^u$	$\mathbf{R}$

خاصية: مشتقة دالة الجذر

ليكن  $n$  من  $\mathbf{N}^* - \{1\}$ . دالة الجذر من الرتبة  $n$  ق ش على  $R_+^*$  ولدينا:  $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$  لكل  $x$  من  $R_+^*$

خاصية

ليكن  $n$  من  $\mathbf{N}^* - \{1\}$ ، إذا كانت  $u$  دالة قابلة للإشتقاق وموجبة قطعاً على مجال  $I$  فإن الدالة  $\sqrt[n]{u}$  قابلة للإشتقاق على  $I$  ولدينا:  $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}}$  لكل  $x$  من  $I$ .

4. تطبيقات:

لتكن  $f$  دالة قابلة للإشتقاق على مجال  $I$ .  
 $f$  تزايدية على  $I$  يكافئ  $f'(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $I$ .  
 $f$  تناقصية على  $I$  يكافئ  $f'(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $I$ .

لتكن  $f$  دالة ق ش على مجال مفتوح  $I$  و  $x_0$  عنصر من  $I$  تقبل  $f$  مطرافاً في  $x_0$  إذا فقط إذا كانت  $f'$  تنعدم في  $x_0$  وتغير إشارتها في  $x_0$

لتكن  $f$  دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال  $I$ .  
 $I$  تنقعر  $C$  موجه نحو الأعلى يكافئ  $f''(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $I$  هندسياً:  $C$  يوجد فوق جميع مماساته  
 $I$  تنقعر  $C$  موجه نحو الأسفل يكافئ  $f''(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $I$  هندسياً:  $C$  يوجد تحت جميع مماساته  
إذا كانت  $f'$  تنعدم في  $x_0$  من  $I$  وتغير إشارتها بجوار  $x_0$  فإن  $I(x_0, f(x_0))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $C$ .  
هندسياً: تغير  $C$  يتغير في النقطة  $I(x_0, f(x_0))$ .

5. عناصر تماثل منحنى دالة:

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$  و  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين.  
يكون المستقيم ذو المعادلة  $x = a$  محور تماثل منحنى  $f$  إذا فقط إذا كان لكل  $x$  من  $D$  لدينا  $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$   
تكون النقطة  $\Omega(a, b)$  مركز تماثل منحنى  $f$  إذا فقط إذا كان لكل  $x$  من  $D$  لدينا:  $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

ملاحظات:



محور تماثل منحنى دالة دائماً يكون مواز لمحور الأرتيب.  
مركز تماثل منحنى دالة لا ينتمي بالضرورة إليه.