

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا  
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

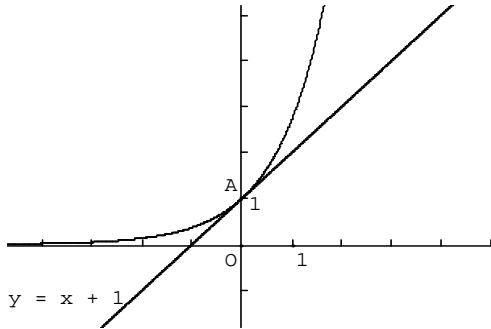
### مذكرة رقم 8 في درس الدوال الأسية

#### محتوى البرنامج

- الدالة الأسية النبيرية
- تعريف وخصائص جبرية
- نهايات اعتيادية
- مشتقة الدالة الأسية النبيرية
- الدالة الأصلية للدالة الأسية النبيرية
- الدالة الأسية للأساس  $a$ .
- تعريف وخصائص جبرية
- دالة الأسية للأساس 10
- دراسة دوال تحتوي على الدالة الأسية النبيرية و اللوغاريتم النبيري

#### القدرات المنتظرة

- التمكن من حل معادلات و متراجحات اسية نبيرية
- التمكن من نهايات الدوال الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها
- التمكن من النهايات الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها
- التمكن من دراسة و تمثيل دوال تحتوي على لوغاريتمات و دوال أسية نبيرية
- تحديد قيم مقربة للعدد  $e^a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) أو تحديد قيم مقربة للعدد  $a$  بحيث  $e^a$  معلوم باستعمال الأداة المعلوماتية



#### (3) خاصيات:

لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  و لكل  $r$  من  $\mathbb{Q}$  لدينا:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; e^{x+y} = e^x \times e^y \bullet$$

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) (e^x)' = e^x \text{ و } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \bullet$$

**تمرين 1:** ليكن  $a$  عددا حقيقيا, و  $b$  عددا من  $\mathbb{R}^{**}$  بسط ما يلي :

$$B = \frac{(e^a)^5 \times e^{3-a}}{\left(e^{\frac{1+3}{2}a}\right)^2} \text{ و } A = e^{\ln(b)} - \ln(2e^b) - \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

$$\text{نضع: } f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} \text{ أحسب } f(2 \ln 3)$$

#### I. الدالة الأسية النبيرية

الدالة  $\ln$  متصلة و تزايدية قطعا على المجال  $]0; +\infty[$  و

$$\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$$

و منه الدالة  $\ln$  تقبل دالة عكسية معرفة على  $\mathbb{R}$ .

**1) تعريف:** الدالة العكسية للدالة  $\ln$  تسمى الدالة الأسية و نرمز لها بالرمز  $\exp$ .

ملاحظة: الكتابة:  $\exp(x)$  نكتبها باختصار على الشكل:  $e^x$

**(2) نتائج:**  $e^0 = 1$  و  $e^1 = e$  و  $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$ .

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in ]0; +\infty[), (y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y)$$

$$(\forall x \in ]0; +\infty[); e^{\ln x} = x \text{ و } (\forall x \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x$$

الدالة  $\exp$  متصلة و تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \text{ لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R}$$

**منحنى الدالة  $\exp$ :** في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة  $\exp$  هو مماثل لمنحنى الدالة  $\ln$  بالنسبة للمستقيم الذي معادلته:  $y = x$ .

## أجوبة:

$$A = e^{\ln(b)} - \ln(2e^b) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) = b - \ln 2 - \ln(e^b) - \ln e + \ln 2$$

$$A = b - \ln 2 - b - 1 + \ln 2 = -1$$

$$B = \frac{(e^a)^5 \times e^{3-a}}{\left(e^{\frac{1+3a}{2}}\right)^2} = \frac{e^{5a} \times e^{3-a}}{e^{2\left(\frac{1+3a}{2}\right)}} = \frac{e^{5a+3-a}}{e^{2+3a}}$$

$$B = \frac{e^{4a+3}}{e^{2+3a}} = e^{4a+3-2-3a} = e^{a+1}$$

$$f(2 \ln 3) = e^{2 \ln 3} - 2e^{\frac{2 \ln 3}{2}} = e^{\ln 3^2} - 2e^{\ln 3} = 3^2 - 2 \times 3 = 3$$

**تمرين 2:** بسط ما يلي:  $A = e^{-x} \times e^{2x}$

$$C = \sqrt{e^{2x}} \times e^{-x} \quad B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$$

$$E = e^{2x} \left( (e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 \right), \quad D = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$$

**أجوبة:**  $A = e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$

$$B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4} = e^{2(2-x)} \times e^{3x-4} = e^{4-2x+3x-4} = e^x$$

$$C = \sqrt{e^{2x}} \times e^{-x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} \times e^{-x} = e^{\frac{2x}{2}} \times e^{-x} = e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$$

$$D = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4} = \frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}} = \frac{e^{5x}}{e^{4x}} = e^{5x-4x} = e^x$$

$$E = e^{2x} \left( (e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 \right)$$

$$E = e^{2x} \left( (e^x)^2 + 2e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 + (e^x)^2 - 2e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 \right)$$

$$E = e^{2x} (2e^{2x} + 2e^{-2x}) = e^{2x} (2e^{2x} + 2e^{-2x})$$

$$E = 2e^{4x} + 2$$

**تمرين 3:** حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

$$g(x) = \frac{3x-1}{(e^x)^2 - 1} \quad \text{و} \quad f(x) = e^{\frac{3x-1}{x^2-2x}}$$

**أجوبة:**  $f(x) = e^{\frac{3x-1}{x^2-2x}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x \neq 0\}$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \text{يعني} \quad x(x-2) = 0 \quad \text{يعني} \quad x=0 \quad \text{أو} \quad x=2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\} \quad \text{ومنه} \quad x=2 \quad \text{أو} \quad x=0$$

$$g(x) = \frac{3x-1}{(e^x)^2 - 1}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / (e^x)^2 - 1 \neq 0\}$$

$$(e^x)^2 - 1^2 = 0 \quad \text{يعني} \quad (e^x - 1)(e^x + 1) = 0$$

$$e^x - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad e^x + 1 = 0 \quad \text{يعني} \quad (e^x - 1)(e^x + 1) = 0$$

$$\text{يعني} \quad e^x = 1 \quad \text{أو} \quad e^x = -1$$

نعلم أن:  $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$  إذن المعادلة:

$$e^x = -1 \quad \text{ليس لها حل في } \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ومنه} \quad x=0 \quad \text{يعني} \quad x = \ln 1 \quad \text{يعني} \quad e^x = 1$$

**تمرين 4:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية:

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad (3) \quad \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (2) \quad e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad (1)$$

$$e^{2x+1-x} = e^1 \Leftrightarrow e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$x=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^1 \Leftrightarrow$$

$$S = \{0\} \quad \text{ومنه}$$

$$e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (2)$$

$$(2-x)-(1+2x) = x-1 \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1}$$

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow 2-x-1-2x = x-1 \Leftrightarrow$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad \text{ومنه}$$

$$(e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad (3)$$

**نضع:**  $e^x = X$  والمعادلة تصبح:  $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = 2 \quad \text{و} \quad X_1 = 3 \quad \text{يعني} \quad X_2 = \frac{5-1}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad X_1 = \frac{5+1}{2 \times 1}$$

$$x_2 = \ln 2 \quad \text{و} \quad x_1 = \ln 3 \quad \text{يعني} \quad e^{x_2} = 2 \quad \text{و} \quad e^{x_1} = 3$$

$$S = \{\ln 2, \ln 3\} \quad \text{ومنه}$$

**تمرين 5:** حل في  $\mathbb{R}$  المترجمات التالية:

$$\frac{1}{e^{x+1}} \geq e^{1-x^2} \quad (2) \quad e^{-3-x} \times e^{1+2x} > \frac{1}{e^x} \quad (1)$$

$$e^{-3-x+1+2x} > e^{-x} \Leftrightarrow e^{-3-x} \times e^{1+2x} > \frac{1}{e^x} \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow -3-x+1+2x > -x \Leftrightarrow$$

$$S = ]1, +\infty[ \quad \text{ومنه}$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -1-x \geq 1-x^2 \Leftrightarrow e^{-1-x} \geq e^{1-x^2} \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

إذن تقبل جذرين هما:

$$x_2 = -1 \quad \text{و} \quad x_1 = 2 \quad \text{يعني} \quad x_2 = \frac{1-3}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{1+3}{2 \times 1}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$x^2-x-2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$S = ]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[ \quad \text{ومنه}$$

**تمرين 6:** حل في  $\mathbb{R}^2$  النظمات التالية:

$$(S_2) \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^x = \frac{2}{e^y} \end{cases} \quad (2) \quad (S_1) \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$(S_1) \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases} \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ -2e^x - 2e^y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases}$$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد:

**تمرين 7:** أحسب النهايات التالية :

تطبيق الخاصية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} (3) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^3+5} (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

تطبيق الخاصية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x (8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} (9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x (11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \text{ (ضع } 2x = X \text{)} (13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1}$$

تطبيق الخاصية:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

$$(15) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-1)e^x (16) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x (17) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} (19) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)e^{2x}$$

تطبيق الخاصية:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} (21) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1} (23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$$

(استعمال المشتقة)

**أجوبة:** (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$  لأن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty$  لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x+1 = +\infty$  إذن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = -\infty$  لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x+1 = -\infty$  إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} = 0$  لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  إذن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$$

(5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^3+5} = +\infty$  لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x^3+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

$$e^y = 2 \text{ يعني } 2e^x + 3e^y - 2e^x - 2e^y = 8 - 6$$

$$\text{يعني } y = \ln 2$$

وبعويض  $y$  بقيمتها في المعادلة 2 نجد:  $e^x + e^{\ln 2} = 3$

يعني  $e^x + 2 = 3$  يعني  $e^x = 1$  يعني  $x = \ln 1 = 0$

ومنه:  $S = \{(0, \ln 2)\}$

$$(2) \begin{cases} e^{x+y} = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ يعني } (S_2) \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{يعني } \begin{cases} x+y = \ln(2 \times 5) \\ x-y = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} x+y = \ln(10) \\ x-y = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\text{يعني } \begin{cases} x+y = \ln 2 + \ln 5 \\ x-y = \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد:  $2x = 2 \ln 2$

$$\text{يعني } x = \ln 2$$

وبعويض  $x$  بقيمتها في المعادلة 1 نجد:

$$\ln 2 + y = \ln 2 + \ln 5$$

يعني  $y = \ln 5$  ومنه:  $S = \{(\ln 2, \ln 5)\}$

**II. نهايات اعتيادية**

**خاصية 1:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

**أمثلة:** لنحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^x$  لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); (2x-1)e^x = 2(xe^x) - e^x$$

و بما أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^x = 0$$

لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x}$  لدينا:  $\frac{e^x + 3}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{3}{x}$

بما أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$  فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} = +\infty$$

**خاصية 2:** لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

**مثال:** لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$  لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{e^x + 3x}{x^3} = \frac{e^x}{x^3} + \frac{3}{x^2}$$

بما أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$  فإن:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^3} = +\infty : \text{اذن } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^3} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty : \text{ومنه}$$

$$x = \frac{X}{3} \text{ يعني } 3x = X \text{ نضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} \quad (13)$$

$$X \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{\frac{X}{3}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 3 \frac{e^X}{X}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} 3 \frac{e^X}{X} = +\infty : \text{اذن } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty : \text{ومنه}$$

(14)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

$$\text{نعلم حسب سؤال سابق أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty \text{ ولدنيا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1} = +\infty : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x - e^x \quad (15)$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^x - 4x^3 e^x \quad (16)$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \quad (17)$$

$$X \rightarrow -\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0^- \quad \frac{1}{x} = X \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0 : \text{ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$$

(18)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x} - 2x e^{2x} = 0 - 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} \quad (19)$$

$$X \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0 \text{ و } x = \frac{X}{2} \text{ يعني } 2x = X \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} = e^0 = 1 : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{e^x}{x} = -\infty \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = +\infty : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} = +\infty : \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(3 - \frac{e^x}{x^3}\right) \quad (10)$$

$$\text{نعلم أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{e^x}{x^3} = -\infty \text{ اذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x = -\infty : \text{اذن}$$

(11)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty : \text{لأن}$$

$$(2x = X \text{ ضع}) \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \quad (12)$$

$$x = \frac{X}{2} \text{ يعني } 2x = X \text{ نضع}$$

$$X \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 8 \frac{e^X}{X^3}$$

**تمرين 8:** أحسب  $f'(x)$  في الحالات الآتية: (1)

$$f(x) = e^{3x} + e^x$$

$$(4) f(x) = x^2 e^{-x} \quad (3) f(x) = 2x - e^{-x} \quad (2)$$

$$f(x) = (2x-1)(e^x - 1)$$

$$(7) f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x} \quad (6) f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{x \ln x}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (9) f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \quad (8)$$

$$f'(x) = (e^{3x} + e^x) : \text{اذن } f(x) = e^{3x} + e^x \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$f'(x) = (e^{3x})' + (e^x)' = (3x)' e^{3x} + e^x = 3e^{3x} + e^x$$

$$f(x) = 2x - e^{-x} \quad (2)$$

$$f'(x) = (2x - e^{-x})' = (2x)' - (e^{-x})' = 2 - (-x)' e^{-x} = 2 + e^{-x}$$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$f'(x) = (x^2 e^{-x})' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2x e^{-x} + x^2 (-x)' e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} (2x - x^2)$$

$$f(x) = (2x-1)(e^x - 1) \quad (4)$$

$$f'(x) = ((2x-1)(e^x - 1))' = (2x-1)' (e^x - 1) + (2x-1) (e^x - 1)'$$

$$f'(x) = 2(e^x - 1) + (2x-1)e^x = 2e^x - 2 + 2xe^x - e^x = e^x - 2 + 2xe^x$$

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} \quad (5)$$

$$f'(x) = \left( (x-1)e^{\frac{1}{x}} \right)' = ((x-1))' e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \left( e^{\frac{1}{x}} \right)'$$

$$f'(x) = 1e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( 1 + (x-1) \frac{1}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^2} \right)$$

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x} \quad (6)$$

$$f'(x) = (\sqrt{e^{2x} - e^x})' = \frac{(e^{2x} - e^x)'}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}} = \frac{2e^{2x} - e^x}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}}$$

$$f(x) = e^{x \ln x} \quad (7)$$

$$f'(x) = (e^{x \ln x})' = (x \ln x)' e^{x \ln x} = \left( (x)' \ln x + x (\ln x)' \right) e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = \left( 1 \ln x + x \frac{1}{x} \right) e^{x \ln x} = (\ln x + 1) e^{x \ln x}$$

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \quad (8)$$

$$f'(x) = ((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1})' = ((e^x - 4))' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) (\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\frac{3X}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{e^x - 1}{X} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 : \text{ لأن}$$

$$x = \frac{1}{X} : \text{اذن } \frac{1}{x} = X \quad \text{نضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad (20)$$

$$X \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} (e^X - 1) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1} \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow x \rightarrow 1 \quad \text{و } x = 1 - X \quad \text{يعني } 1 - x = X \quad \text{نضع } X \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{-X} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} \quad (22)$$

$$X \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0 \quad \text{و } x = -X \quad \text{يعني } -x = X \quad \text{نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{-X} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} \quad (23) \quad \text{استعمال المشتقة}$$

$$f(0) = e^{0+1} = e^1 = e : \text{اذن } f(x) = e^{x+1} \quad \text{نضع}$$

$$f'(0) = e : \text{اذن } f'(x) = (x+1)' e^{x+1} = 1e^{x+1} = e^{x+1} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e$$

### III. مشتقة الدالة $x \mapsto e^x$

**خاصية:** الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (e^x)' = e^x$$

إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  فإن الدالة:

$$f : x \mapsto e^{u(x)}$$

و لدينا:  $(\forall x \in I); f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$ .

و نكتب اصطلاحاً:  $(\forall x \in I); (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

و للبرهان يكفي ملاحظة أن:  $f = \exp \circ u$

**مثال:** لنحسب مشتقة الدالة  $f : x \mapsto e^{x^2-x}$

لدينا الدالة  $x \mapsto x^2 - x = u$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و منه  $f$  قابلة

للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

و لدينا:  $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (x^2 - x)' e^{x^2-x}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (2x - 1) e^{x^2-x}$$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

$$I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x} \quad (4)$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(\cos x)' e^{\cos x}$$

$$F(x) = e^{\cos x} : \text{اذن}$$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I = ]0; +\infty[ \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x}$$

$$F(x) = \ln|e^x - x| : \text{اذن}$$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

**تمرين 10:** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

1. أدرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أعط جدول تغيراتها

2. حدد دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 2e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty$$

$$f'(x) = (e^{2x} - 2e^x)' = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x (e^x - 1)$$

إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $e^x - 1$

$$x > 0 \Leftrightarrow x > \ln 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$

$$\text{اذن} : x > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$

ومنه جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$0$	$-1$	$+\infty$

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad \text{2}$$

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x = \frac{1}{2}(2x)' e^{2x} - 2(e^x)'$$

اذن :  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

**تمرين 11:** أحسب  $f'(x)$  في الحالات الآتية على المجال  $I$

$$1. f(x) = e^{x^2-3x}, I = \mathbb{R}$$

$$2. f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}; I = ]0; +\infty[$$

$$3. f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{x^2-3x}, I = \mathbb{R} \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$f'(x) = (e^{x^2-3x})' = (x^2 - 3x)' e^{x^2-3x} = (2x-3)e^{x^2-3x}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x-1) + e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (9)$$

$$f'(x) = \left( \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \right)' = \left( \frac{2}{(x-1)^2} \right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \left( e^{\frac{x+1}{x-1}} \right)'$$

$$f'(x) = (2(x-1)^{-2})' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)' e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = -4(x-1)^{-3} ((x-1)') e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \left( \frac{-4}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^4} \right) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

**IV. الدوال الأصلية للدالة:**  $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$

**خاصية:** إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فان الدوال

الأصلية للدالة  $e^{u(x)} u'(x)$  على  $I$

هي الدوال المعرفة على  $I$  بما يلي:  $x \mapsto e^{u(x)} + k$  حيث  $k$  عدد حقيقي

**مثال:** الدالة:  $x \mapsto e^{\sin x}$  دالة أصلية للدالة

$$\mathbb{R} \text{ على } x \mapsto \cos x e^{\sin x}$$

**تمرين 9:** حدد دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

$$1. I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$$

$$2. I = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$3. I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$4. I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$5. I = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} \quad \text{أجوبة (1)}$$

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$$

اذن :  $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

$$I = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} - 1)^2}$$

اذن :  $F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x} - 1}$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

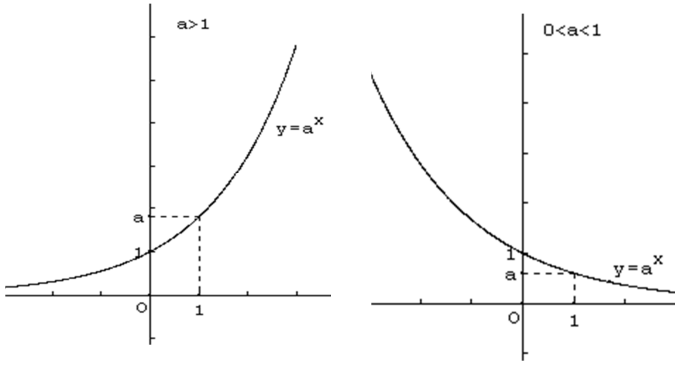
$$I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3 \quad (3)$$

$$f(x) = e^x (e^x - 1)^3 = (e^x - 1)' (e^x - 1)^3$$

$$\text{اذن} : F(x) = \frac{1}{3+1} (e^x - 1)^{3+1} = \frac{1}{4} (e^x - 1)^4$$

❖ إذا كان  $a > 1$  فان:

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); (a^x < a^y \Leftrightarrow x < y)$$



**تمرين 12:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات و المترجمات الآتية:

$$5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0 \quad (3) \quad 3^x = 12 \quad (2) \quad 2^{x+1} = 8^x \quad (1)$$

$$(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1} \quad (5) \quad 2^{x-1} > 4^x \quad (4)$$

**أجوبة: (1)**  $2^{x+1} = 8^x$  يعني  $2^{x+1} = (2^3)^x$  يعني  $2^{x+1} = 2^{3x}$

يعني  $x+1 = 3x$  يعني  $1 = 2x$  يعني  $x = \frac{1}{2}$  ومنه:  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

(2)  $3^x = 12$  يعني  $x = \log_3 12$  ومنه:  $S = \{ \log_3 12 \}$

(3)  $2^x - 3 \times 2^1 \times 2^x - 16 = 0$  يعني  $2^x - 3 \times 2^{x+1} - 16 = 0$

**نضع:**  $2^x = X$  والمعادلة تصبح:  $X^2 - 6X - 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 + 4 \times 1 \times 16 = 100 > 0$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1 = \frac{6+10}{2 \times 1} = 8$  و  $X_2 = \frac{6-10}{2 \times 1} = -2$  يعني  $X_1 = 8$  و  $X_2 = -2$

$2^x = 8$  يعني  $x_1 = \log_2 8$  و  $2^x = -2$  ليس لها حل

$x_1 = \log_2 8 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$  يعني  $x_1 = 3$

ومنه:  $S = \{3\}$

(4)  $2^{x-1} > 4^x$  يعني  $2^{x-1} > (2^2)^x$  يعني  $2^{x-1} > 2^{2x}$

يعني  $x-1 > 2x$  يعني  $-1 > x$

ومنه:  $S = ]-\infty, -1[$

(5)  $(0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1}$  يعني  $2x < x+1$  لأن  $0 < 0,5 < 1$

يعني  $x < 1$  ومنه  $S = ]-\infty, 1[$

### (3) حالة خاصة الدالة الأسية للأساس 10

❖ الدالة:  $x \mapsto 10^x$  تسمى الدالة الأسية للأساس 10 و نرسم لها بالرمز  $\exp_{10}$

و اصطلاحا بالرمز  $10^x$  و لدينا  $10^x = e^{x \ln 10}$

❖  $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall x \in ]0; +\infty[); 10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$

حيث  $\log$  هي دالة اللوغاريتم العشري

**مثال:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة الآتية:  $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

**الجواب:**  $100^x + 40 = 14 \times 10^x$  يعني

$$(10^2)^x - 14 \times 10^x + 40 = 0$$

يعني  $10^{2x} - 14 \times 10^x + 40 = 0$

$$(10^x)^2 - 14 \times 10^x + 40 = 0$$

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}; I = ]0; +\infty[ \quad (2)$$

$$f'(x) = \left( (x-1)e^{\frac{1}{x}} \right)' = (x-1)' e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \left( e^{\frac{1}{x}} \right)'$$

$$f'(x) = 1e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left( 1 - \frac{1}{x^2}(x-1) \right) = e^{\frac{1}{x}} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; I = \mathbb{R} \quad (3)$$

$$f'(x) = \left( x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' = 1 - \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' = 1 - \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

**V. الدالة الأسية للأساس a** ( $a \neq 1$  و  $a > 0$ )

**(1) تعريف:** ليكن  $a$  عددا حقيقيا موجبا قطعيا و مخالفا للعدد 1 الدالة الأسية للأساس  $a$  هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي  $x$

بالعدد الحقيقي  $e^{x \ln a}$ , و الذي يكتب  $a^x$  و نرسم لها بالرمز  $\exp_a$ , و لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

### (2) نتائج:

❖ لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $\ln(a^x) = x \ln a$

❖  $(\forall x \in \mathbb{R})$  و  $(\forall y \in ]0; +\infty[)$   $a^x = y$  يكافئ

$$x = \log_a y$$

❖ لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $a^x = a^y$  يكافئ  $x = y$

**(3) خاصيات:** لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:

$$a^x a^y = a^{x+y}; \frac{1}{a^x} = a^{-x}; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; (a^x)^y = a^{xy}$$

**ملحوظة:** هذه الخاصيات هي تمديد لخاصيات القوى الجذرية و

يمكن البرهان عليها باستعمال المتساوية  $a = e^{x \ln a}$

### VI. الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto a^x$

**(1) خاصية:** الدالة  $f: x \mapsto a^x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (\ln a) a^x$$

**البرهان:** لدينا:  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

نضع:  $u(x) = x \ln a$  و منه:  $f(x) = e^{u(x)}$

لدينا  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (دالة خطية) إذن الدالة  $f$  قابلة

للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

و لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = \ln a e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$$

### (2) نتيجة:

❖ إذا كان  $0 < a < 1$  فان:

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); (a^x < a^y \Leftrightarrow x > y)$$

اشارة  $f'(x)$  هي اشارة  $x+1$   
 $x = -1$  يعني  $x+1 = 0$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$0$	$+$

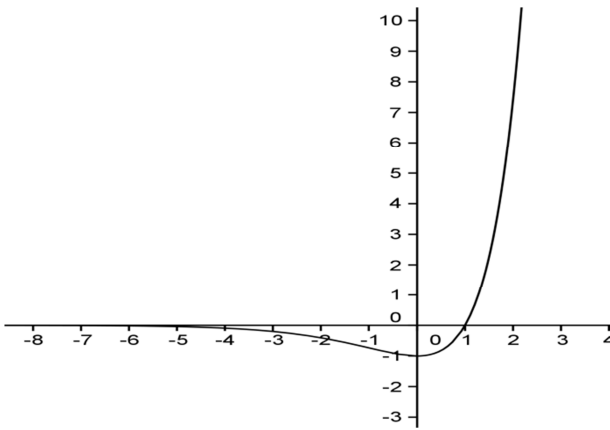
ومنه

• تقعر  $(C_f)$  موجه نحو محور الأرتيب الموجبة على المجال:  $[-1; +\infty[$

• تقعر  $(C_f)$  موجه نحو محور الأرتيب السالبة على المجال:  $]-\infty, -1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر  
 النقطة:  $A(-1, -2e^{-1})$  نقطة انعطاف ل  $(C_f)$

(5)



**مثال 2:** المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $f$  الدالة المعرفة كالتالي:  $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$

حدد  $D_f$  وأحسب النهايات عند محداث  $D_f$   
 حدد تغيرات  $f$  و أعط جدول التغيرات

تحقق من أن:  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

حدد معادلة المقاربين المائلين لمنحنى  $f$  (مع تحديد الوضع النسبي)

**أجوبة (1):**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x + 1 \neq 0\}$

$\forall x \in \mathbb{R} e^x > 0$  لأن:  $e^x = -1$  ليس لها حل

ومنه:  $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$$

$$f'(x) = \left( x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right)' = 1 - 3 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = 1 - 3 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

**نضع:**  $X = 10^x$  والمعادلة تصبح:  $X^2 - 14X + 40 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 40 = 36 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = 4 \text{ و } X_1 = 10 \text{ يعني } X_2 = \frac{14-6}{2 \times 1} \text{ و } X_1 = \frac{14+6}{2 \times 1}$$

يعني  $10^{x_2} = 4$  و  $10^{x_1} = 10$  يعني  $x_2 = \log_{10} 4$  و  $x_1 = 1$

ومنه:  $S = \{1, \log_{10} 4\}$

## VII. دراسة دوال تحتوي على الدالة الأسية النيبيرية و اللوغاريتم النيبيري

### مثال 1: لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة ما يلي:

$$f(x) = (x-1)e^x$$

1. حدد  $D_f$  أحسب النهايات عند محداث  $D_f$

2. أحسب  $f'(x)$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C)$  بجوار  $+\infty$

4. أدرس تقعر  $(C)$

5. أنشئ المنحنى  $(C)$

**أجوبة (1)**  $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

مبياتيا:  $y = 0$  مقارب ل  $(C)$  بجوار  $-\infty$

$$f'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' \quad (2)$$

$$1. f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

2. اشارة  $f'(x)$  هي اشارة  $x$

3. ومنه جدول تغيرات الدالة  $f$

4.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$0$	$-1$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x \quad (3)$$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

اذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ومنه  $(C)$  يقبل فرعا شلجما في اتجاه محور الأرتيب بجوار  $+\infty$

4 دراسة تقعر  $(C)$

$$f''(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x(1+x)$$



اشارة:  $f'(x)$  هي اشارة  $(e^x)^2 - e^x + 1$

نضع:  $e^x = X$  والمعادلة تصبح:  $X^2 - X + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

اذن هذه المعادلة ليس لها حل ومنه اشارتها هي اشارة 1 ومنه:

$$(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$$

ومنه:  $f'(x) > 0$  جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) نتحقق من أن:  $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3(e^x + 1) + 3}{e^x + 1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$$

(4) نعلم أن:  $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$  يعني  $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1}$

اذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$  ومنه:

$y = x - 1$  مستقيم مقارب مائل ل  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

لدينا:  $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1} > 0$  اذن  $(C_f)$  فوق  $y = x - 1$  ( $\Delta$ )

نعلم أن:  $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$  يعني

$$f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1}$$

اذن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3e^x}{e^x + 1} = 0$  ومنه:

$y = x + 2$  مستقيم مقارب مائل ل  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

لدينا:  $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1} < 0$  اذن  $(C_f)$  تحت  $(D) y = x + 2$

**تمرين 13:** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي:

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

1. أحسب النهاية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^+$ :  $f(x) = \frac{e^x - 4}{x} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين في النقطة 0 ثم أعط تاويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

4. بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^+$ :  $f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5. أدرس إشارة  $f'(x)$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

6. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C)$  بجوار  $+\infty$

7. أحسب  $f(2 \ln 2)$  ثم أنشئ المنحنى  $(C)$

**أجوبة: (1)**  $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty$

$$f(x) = \frac{(e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}}{x} = \frac{(e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})^2}{x\sqrt{e^x - 1}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{(e^x - 4)(e^x - 1)}{x\sqrt{e^x - 1}} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \quad (3)$$

نعلم أن:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 4 = -3$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^x - 1} = 0^+$

اذن:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$  ومنه  $f$  غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند  $x_0 = 0$

مبيانيا منحنى الدالة  $f$  يقبل نصف مماس يوازي محور الأرتاب في النقطة  $A(0; f(0))$  وموجه نحو الأسفل

4) بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^+$ :  $f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

$$f'(x) = \left( (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \right)' = (e^x - 4)' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) (\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + \frac{e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(\sqrt{e^x - 1})^2 + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

5) اشارة  $f'(x)$  هي اشارة  $e^x - 2$  لأن:  $\frac{3e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^+$

$e^x - 2 > 0$  يعني  $e^x > 2$  يعني  $x > \ln 2$

$$f(\ln 2) = (e^{\ln 2} - 4)\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = (2 - 4)\sqrt{2 - 1} = -2$$

$x$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	$-2$	$+\infty$

$$f'(x) = \left( \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \right)' = \frac{(e^x)' \sqrt{1-e^{2x}} - e^x (\sqrt{1-e^{2x}})'}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{1-e^{2x}} - e^x \frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2} = \frac{2e^x(1-e^{2x}) + 2e^x e^{2x}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2e^{3x} + 2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} = \frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} > 0$$

$$\forall x \in ]-\infty, 0[$$

$x$	$-\infty$	$0$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$0$	$+\infty$

**(3)**  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $I = ]-\infty, 0[$  ومتصلة

وبالتالي  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$

معرفة على مجال:  $J = f(I) = f(]-\infty, 0[) = ]0, +\infty[$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} = x^2 \text{ يعني } \left( \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} \right)^2 = x^2 \text{ يعني } \begin{cases} \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} = x \\ y \in ]-\infty, 0[ \end{cases}$$

$$e^{2y} = x^2 - x^2 e^{2y} \text{ يعني } e^{2y} = x^2 (1 - e^{2y})$$

$$e^{2y} + x^2 e^{2y} = x^2 \text{ يعني}$$

$$e^{2y} = \frac{x^2}{1+x^2} \text{ يعني } e^{2y} (1+x^2) = x^2 \text{ يعني}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) \text{ يعني } 2y = \ln \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) \text{ يعني}$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad y = \ln \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ يعني}$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f^{-1}(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \text{ ومنه}$$

**تمرين 15:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$$

ليكن  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم

$$\cdot \|\vec{i}\| = 2cm \text{ حيث } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

(1) أ. بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . ما هو التأويل الهندسي للنتيجة

المحصل عنها؟

$$\text{ب. بين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(2) أ. بين أن  $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$   $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{4}{x} \right) \sqrt{e^x - 1} \quad (6)$$

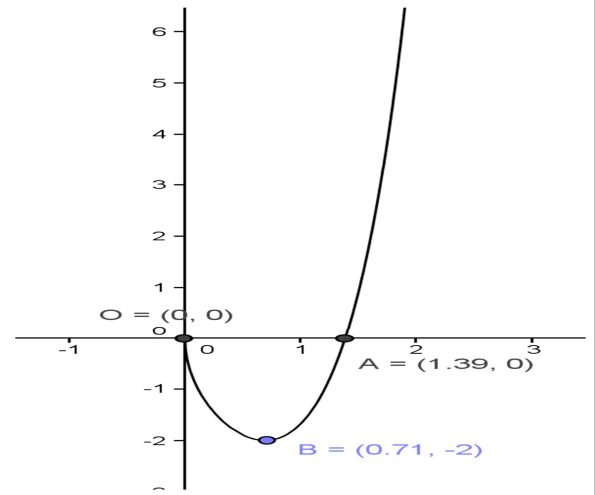
نعلم أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

اذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ومنه  $(C)$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه

محور الأرتايب بجوار  $+\infty$  (7)

$$f(\ln 2) = (e^{2 \ln 2} - 4) \sqrt{e^{2 \ln 2} - 1} = (e^{\ln 4} - 4) \sqrt{e^{\ln 4} - 1} = (4 - 4) \sqrt{4 - 1} = 0$$



**تمرين 14:** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1. حدد  $D_f$  وأحسب النهايات عند محددات  $D_f$

2. أدرس تغيرات الدالة  $f$  ثم أعط جدول تغيراتها

3. بين أن  $f$  تقبل دالة عكسية معرفة على مجال  $J$  يجب تحديده

4. حدد  $f^{-1}(x)$   $\forall x \in J$

$$\text{أجوبة: } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - e^{2x} > 0\}$$

$$e^0 > e^{2x} \text{ يعني } 1 > e^{2x} \text{ يعني } 1 - e^{2x} > 0$$

$$\text{يعني } 0 > 2x \text{ يعني } x < 0$$

$$\text{ومنه: } D_f = ]-\infty, 0[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} \left( \frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\left( \frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)} = 0^+ \text{ لأن}$$

اذن :  $e^x + 1 > 1$  اذن :  $\ln(e^x + 1) > \ln 1$  اذن :

$$\ln(e^x + 1) > 0$$

اذن :  $-\ln(e^x + 1) < 0$  وبالتالي : اذن  $(C_f)$  تحت  $y = x + 1$

(D)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \text{ نبين أن } \text{????}$$

$$f'(x) = (x+1 - \ln(1+e^x))' = 1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} > 0$$

ب . ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$1$

ج . دراسة تقعر المنحنى  $(C)$  .

$$f''(x) = \left( \frac{1}{1+e^x} \right)' = -\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

تقعر  $(C_f)$  موجه نحو محور الأرتيب السالبة على  $\mathbb{R}$  ،

ويمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

د . نبين أن المنحنى  $(C)$  يقطع محور الأفاصيل في نقطة

ينبغي تحديد أفصولها  $x_0$  ???

نحل المعادلة :  $f(x) = 0$  يعني  $1 - \ln(1+e^{-x}) = 0$

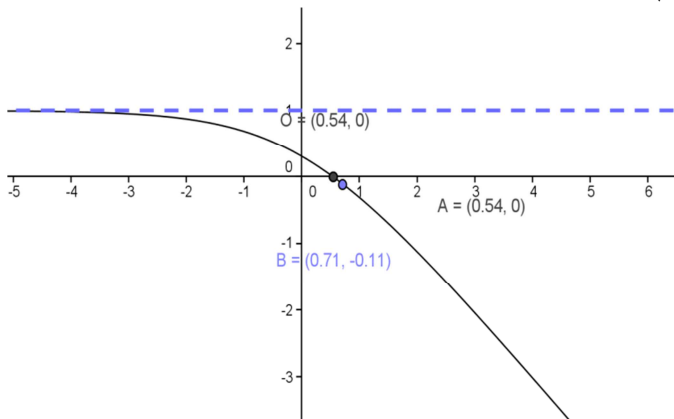
يعني  $\ln(1+e^{-x}) = \ln e$  يعني  $\ln(1+e^{-x}) = 1$

يعني  $1+e^{-x} = e$  يعني  $e^{-x} = e - 1$  يعني  $-x = \ln(e-1)$

يعني  $x = -\ln(e-1)$  ومنه النقطة أفصولها هو :

$$x_0 = -\ln(e-1)$$

(4)



(5) أ . بين أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو مجال  $J$  ينبغي تحديده .

ب . استنتج أن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل بجوار  $-\infty$  .

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين  $(C)$  و  $(D)$  .

(3) أ . بين أن  $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$  .

ب . ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  .

ج . ادرس تقعر المنحنى  $(C)$  .

د . بين أن المنحنى  $(C)$  يقطع محور الأفاصيل في نقطة

ينبغي تحديد أفصولها  $x_0$  .

(4) أنشئ المنحنى  $(C)$  في المعلم  $(O; i, j)$  .

(5) أ . بين أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو مجال  $J$  ينبغي تحديده .

ب . أحسب  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$  .

الأجوبة:  $f(x) = 1 - \ln(1+e^{-x})$

(1) أ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1+e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

التأويل الهندسي:  $y = 0$  مقارب ل  $(C)$  بجوار  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

(2) أ . نبين أن  $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x + 1 - \ln(1+e^x)$  .

$$f(x) = 1 - \ln(1+e^{-x}) = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 - \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$f(x) = 1 - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) = 1 - \ln(e^x + 1) + x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1) \text{ ومنه}$$

ب . وجدنا أن :  $f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1)$  اذن :

$$f(x) - (x+1) = -\ln(e^x + 1)$$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\ln(e^x + 1) = 0$$

لأن :  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$  وبالتالي :

لمستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل بجوار  $-\infty$  .

ج . دراسة الوضع النسبي للمنحنيين  $(C)$  و  $(D)$  . ???

ندرس إشارة :  $f(x) - (x+1) = -\ln(e^x + 1)$

نعلم أن :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

$f$  تزايدية قطعاً على المجال  $\mathbb{R}$  ومتصلة

وبالتالي  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$

معرفة على مجال:  $J = f(I) = f(\mathbb{R}) = ]-\infty; 1[$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$1 - x = \ln(1 + e^{-y}) \text{ يعني } \begin{cases} 1 - \ln(1 + e^{-y}) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$1 + e^{-y} = e^{1-x} \text{ يعني}$$

$$-y = \ln(e^{1-x} - 1) \text{ يعني } e^{-y} = e^{1-x} - 1$$

$$y = -\ln(e^{1-x} - 1) \text{ يعني}$$

$$\forall x \in ]-\infty; 1[ \quad f^{-1}(x) = -\ln(e^{1-x} - 1)$$

### **تمرين 16BIS:**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f(x) = 3 - \ln(1 + e^{-x})$$

ليكن  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم

$$\cdot \|\vec{i}\| = 2cm \text{ حيث } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ما هو التأويل الهندسي

للنتائج المحصل عنها ؟

(2) أ. بين أن  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 3 - \ln(1 + e^x)$

ب. استنتج أن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x + 3$  مقارب

مائل بجوار  $-\infty$ .

ج. حدد الوضع النسبي للمنحنيين  $(C)$  و  $(D)$ .

(3) أ. بين أن  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

ج. ادرس تقعر المنحنى  $(C)$ .

د. بين أن المنحنى  $(C)$  يقطع محور الأفاصيل في نقطة

ينبغي تحديد أفضولها  $x_0$ .

(4) أنشئ المنحنى  $(C)$  في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(5) أ. بين أن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو مجال  $J$  ينبغي تحديده.

ب. أحسب  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$ .