

درس الدوال الأسية:

الأشكال الغير محددة هي: $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0 \times \infty$ و $(+\infty) + (-\infty)$

II. الدالة الأسية للأساس a ($a > 0$)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) a^x = e^{x \ln a} \quad (a \neq 1)$$

لكل x من \mathbb{R} لدينا: $\ln(a^x) = x \ln a$ و $a^x = a^y$ يكافئ $x = y$

$$\text{ولدينا: } (a^x)^y = a^{xy}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}; \quad a^x a^y = a^{x+y}$$

خاصية: الدالة $f: x \mapsto a^x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (\ln a) a^x$$

• إذا كان $0 < a < 1$ فان: $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); (a^x < a^y \Leftrightarrow x > y)$

• إذا كان $a > 1$ فان: $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); (a^x < a^y \Leftrightarrow x < y)$

• الدالة: $x \mapsto 10^x$ تسمى الدالة الأسية للأساس 10 ونرمز لها بالرمز \exp_{10}

و اصطلاحا بالرمز 10^x ولدينا $10^x = e^{x \ln 10}$

• $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall x \in]0; +\infty[); 10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$

حيث \log هي دالة اللوغاريتم العشري



حظ سعيد

I. الدالة الأسية النيبيرية: e^x

تعريف: الدالة العكسية للدالة \ln تسمى الدالة الأسية ونرمز لها بالرمز \exp .

ملاحظة: الكتابة: $\exp(x)$ نكتبها باختصار على الشكل: e^x

نتائج: $e^0 = 1$ و $e^1 = e$ ولدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$.

$(\forall x \in \mathbb{R}); (\forall y \in]0; +\infty[); (e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y)$

$(\forall x \in]0; +\infty[); e^{\ln x} = x$ و $(\forall x \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x$

• الدالة \exp متصلة وقابلة للاشتقاق و $(e^x)' = e^x$

ومنه الدالة الأسية النيبيرية تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

$(e^x > e^y \Leftrightarrow x > y)$ و $(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$ لكل x و y من \mathbb{R}

• لكل x و y من \mathbb{R} ولكل r من \mathbb{Q} لدينا:

$$e^x = (e^r)^{\frac{x}{r}} \quad \text{و} \quad e^x \times e^y = e^{x+y} \quad \text{و} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{و} \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

• إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} فان الدالة:

$$f: x \mapsto e^{u(x)}$$

ولدينا $(\forall x \in I); (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

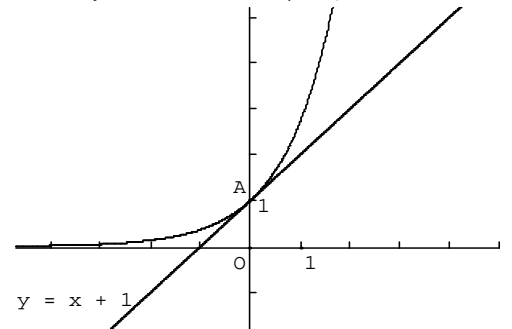
خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال

الأصلية للدالة $e^{u(x)}$ على I

هي الدوال المعرفة على I بما يلي: $x \mapsto e^{u(x)} + k$ حيث k عدد حقيقي

منحنى الدالة \exp : منحنى الدالة \exp هو مماثل لمنحنى الدالة

\ln بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = x$.



• نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$