

(I) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

أ- (1) تحقق أنه  $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$

ب- استنتج أنه  $f$  دالة فردية

أ- (2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- يبي أنه المستقيم  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  ( $\Delta$ ) مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$

بجوار  $+\infty$

أ- (3) يبي أنه  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}^+$

ج- استنتج أنه  $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$  لكل  $x$  مع  $\mathbb{R}^+$

أ- (4) أسمى المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$

أ- (5) يبي أنه  $\left( \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \int_{-1}^0 \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln \left( \frac{e+1}{2} \right)$

ب- حدد مساحة الحيز المستوي المحصور بين  $(C_f)$  و محور الأفصبل

والمستقيمين  $x = 0$  ;  $x = -1$

(II) لتكن  $(U_n)_n$  متتالية معرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{U_n} + 1} \text{ و } U_0 = 1$$

أ- (1) يبي أنه  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > 0$

أ- (2) تحقق أنه  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$

ب- استنتج أنه  $(U_n)_n$  متتالية تناقصية

أ- (3) يبي أنه  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \leq \left( \frac{1}{2} \right)^n$

ثم استنتج نهاية المتتالية  $(U_n)_n$

(I) لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $g(x) = e^{-x} + x - 1$

أ- (1) أحسب  $g'(x)$  ثم استنتج أنه  $g$  تزايدية على  $[0, +\infty[$  و أنه تناقصية على  $]-\infty, 0]$

أ- (2) أحسب  $g(0)$  و استنتج أنه  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq 0$

ب- استنتج أنه  $(\forall x \in \mathbb{R}) e^{-x} + x \geq 1$

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

أ- (1) يبي أنه مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $D = \mathbb{R}$

أ- (2) يبي أنه  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$

ب- أثبت أنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

ثم أول هندسيا التتجيه

أ- (3) يبي أنه  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

ب- أدسه إشارة  $f'(x)$  ثم أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$

أ- (4) أكتب معادلة المماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $x_0 = 0$

ب- تحقق أنه  $(\forall x \in \mathbb{R}) x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$

ثم أدسه إشارة  $x - f(x)$

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $y = x$  ( $\Delta$ )

أ- (5) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  (نأخذ  $-0,6 = \frac{1}{1-e}$ )

(III) لتكن  $(U_n)_n$  متتالية معرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ و } U_0 = 1$$

أ- (1) يبي أنه  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq U_n \leq 1$

أ- (2) يبي أنه  $(U_n)_n$  متتالية تناقصية

أ- (3) استنتج أنه المتتالية  $(U_n)_n$  متقاربة وحدد نهايتها

مسألة (1)

الجزء 1 : نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة بما يلي :

$$g(x) = x - 1 + e^{2x}$$

أ- (1) أحسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- أحسب المشتقة  $g'(x)$  ثم ضج جدول تغيرات الدالة  $f$

أ- (2) استنتج إشارة  $g(x)$  (لاحظ أنه  $g(0) = 0$ )

الجزء 2 : لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي  $f(x) = x^2 - 2x + e^{2x}$

أ- (1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و يبي أنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- أدسه الفرجيه الانهائيه للمنحنى  $(C_f)$

أ- (2) يبي أنه  $f'(x) = 2g(x)$  ثم أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$

أ- (3) أدسه تغير المنحنى  $(C_f)$

أ- (4) أسمى المنحنى  $(C_f)$

الجزء 3 : نعتبر المتتالية  $(U_n)_n$  المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = U_n^2 + e^{2U_n} \text{ و } U_0 = 1$$

أ- (1) يبي أنه  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq U_n$

أ- (2) يبي أنه  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} \geq 2U_n$

ب- يبي أنه  $(U_n)_n$  تزايدية

أ- (3) أثبت أنه  $U_n \geq 2^n$

ب- هل المتتالية متقاربة ؟ حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$