| سلسلة 1 | الدوال الأسية<br>حلول مقترحة | السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية |
|---|---|---|

**تمرين 1** :

**1**

لدينا $x=2 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow 4x-3=5 \Leftrightarrow e^{4x-3}=e^{5}$ بالتالي : $S=\{2\}$

لدينا $x=4 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow e^{x-4}=e^{0} \Leftrightarrow e^{x-4}=1$ بالتالي : $S=\{4\}$

لدينا $e^{x^2-3x-3}=-1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3}+1=0$ وبما أن $e^{t}>0$ $\forall t\in IR$ بينما $-1<0$ فإن : $S=\varnothing$

لدينا : $\left(e^{x}\right)^{2}+e^{x}-2=0 \Leftrightarrow e^{2x}+e^{x}-2=0$ بوضع : $t=e^{x}$ ، نجد : $t^{2}+t-2=0$

منه : $\Delta=1+8=9$ منه : $t=\frac{-1+3}{2}=1$ أو $t=\frac{-1-3}{2}=-2$ منه : $e^{x}=1$ أو $e^{x}=-2$ (غير ممكن)

بالتالي : $S=\{0\}$

لدينا
$$e^{3x}=2e^{x+1} \Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \Leftrightarrow 3x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right) \Leftrightarrow 3x=\ln(2)+x+1$$
$$e^{3x}=2e^{x+1} \Leftrightarrow 2x=1+\ln(2) \Leftrightarrow x=\frac{1+\ln(2)}{2}$$

بالتالي : $S=\left\{\frac{1+\ln(2)}{2}\right\}$

نعتمد في حل مثل هذه المعادلات على القواعد $\forall(x,y)\in IR^{2}\ \left(e^{x}=e^{y} \Leftrightarrow x=y\right)$ و $\forall x\in IR\ \ e^{x}>0$
و $\forall x>0\ \forall y>0\ \ (x=y \Leftrightarrow \ln x=\ln y)$ و $\forall x\in IR\ \ \ln\left(e^{x}\right)=x$

**2**

نعلم أن : $\forall x\in IR\ \ e^{x}>0$ إذن $\forall x\in IR\ \ e^{x}+1>0$

إذن : $x\leq 1 \Leftrightarrow e^{x}\leq e^{1} \Leftrightarrow e^{x}-e\leq 0 \Leftrightarrow \left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-e\right)\leq 0$ بالتالي : $S=\left]-\infty;1\right]$

أولا لنعمل الحدودية : $t^{2}-4t+3$ ، لدينا : $\Delta=16-12=4$ منه : $t_{1}=\frac{4+2}{2}=3$ و $t_{2}=\frac{4-2}{2}=1$

منه : $t^{2}-4t+3=(t-3)(t-1)$

منه : $\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}-1\right)>0 \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-4e^{x}+3>0 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^{x}+3>0$

لنحدد إشارة كل من $e^{x}-1$ و $e^{x}-3$

لدينا : $x=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow e^{x}-1=0$ و $x>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow e^{x}-1>0$

و $x=\ln(3) \Leftrightarrow e^{x}=3 \Leftrightarrow e^{x}-3=0$ و $x>\ln(3) \Leftrightarrow e^{x}>3 \Leftrightarrow e^{x}-3>0$

منه :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln(2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{x}-1$ | | - | 0 | + | | + | |
| $e^{x}-3$ | | - | | - | 0 | + | |
| $\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}-1\right)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

بالتالي : $S=\left]-\infty;0\right[\cup\left]\ln(2);+\infty\right[$

كان من الممكن حل هذه المتراجحة بطريقة أسهل، لكننا تعمدنا إدراج هذه الطريقة لأنها هي الأكثر استعمالا عند تحديد إشارة المشتقة.

**تمرين 2** :

$f'(x)=\left(e^{5x}\right)'=5e^{5x}$ | $f'(x)=\left(e^{-7x}+2e^{x}\right)'=-7e^{-7x}+2e^{x}$

$$f'(x)=\left(\ln(x)\,e^{x}\right)'=\left(\ln(x)\right)'e^{x}+\ln(x)\left(e^{x}\right)'=\frac{1}{x}e^{x}+\ln(x)e^{x}=e^{x}\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)$$

$f'(x)=\left(e^{x+\ln x}\right)'=\left(x+\ln x\right)'e^{x+\ln x}=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x+\ln x}$ | $f'(x)=\left(\ln\left(e^{x}+1\right)\right)'=\frac{\left(e^{x}+1\right)'}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

**تمرين 3** : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x+2}{e^x+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1+\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{e^x}{x}=0\quad\left(\frac{0}{-\infty}\right)$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x+1}{x^3}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x^3}+\frac{1}{x^3}=+\infty\qquad(+\infty+0\to+\infty)$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2e^x+x}{e^x+3}=-\infty\quad\left(\frac{0-\infty}{3}\to-\infty\right)$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2e^x+x}{e^x+3}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x\left(2+\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{3}{e^x}}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

$$\lim_{x\mapsto0^+}\left(e^x-1\right).\ln(x)=\lim_{x\mapsto0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right).\left(x.\ln(x)\right)=1\times0=0$$

$$\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-1+1-e^x}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\mapsto0}2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}=2\times1-1=1$$

$$\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\mapsto0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{e^{3x}-1}{x}}=\lim_{x\mapsto0}\frac{2\frac{e^{2x}-1}{2x}}{3\frac{e^{3x}-1}{3x}}=\frac{2\times1}{3\times1}=\frac{2}{3}$$

طريقة 1

$$\lim_{x\mapsto0}\frac{\sqrt{e^x}-1}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)}{x\left(\sqrt{e^x}+1\right)}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^x-1}{x\left(\sqrt{e^x}+1\right)}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{e^x+1}=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

طريقة 2

$$\lim_{x\mapsto0}\frac{\sqrt{e^x}-1}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{1}{2}.\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

للتذكير : $\lim_{x\mapsto0}\frac{e^x-1}{x}=1$ أو بصفة عامة : $\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$ ، $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ أو بصفة عامة : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ تعني أيضا أن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{e^x}=0^+$

لا تحاول استعمال أي طريقة إلا بعد التعويض المباشر و التحقق من وجود شكل غير محدد، لأنه كما تبين الأمثلة كثيرا ما تكون النتيجة مباشرة و نجدها بسهولة بمجرد التعويض

**تمرين 4** : $u_{n+1}=u_n^3\,;\,n\ge0$ ; $u_0=\frac{1}{2}$ ، $v_n=\ln(u_n)$

1

لدينا : $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln(u_n^3)=3\ln(u_n)=3v_n$ ، إذن $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية منه : $v_n=v_0\times q^n=\ln\left(\frac{1}{2}\right)3^n$

منه : $\ln(u_n)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)3^n$ منه : $u_n=e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)3^n}=\left(e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{3^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}$

2

بما أن : $3>1$ فإن $\lim_{x\mapsto+\infty}3^n=+\infty$ وبما أن $0<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=0$

للتذكير إذا كان $a>1$ فإن $\lim_{x\mapsto+\infty}a^n=+\infty$ و إذا كان $-1<a<1$ فإن : $\lim_{x\mapsto+\infty}a^n=0$

**تمرين 5** : $f(x)=2x-\dfrac{e^x}{e^x-1}$

**1**

$$Df=\{x\in IR\ /\ e^x\neq 1\}=\{x\in IR\ /\ x\neq 0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x-\frac{e^x}{e^x-1}=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x-\frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x-\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=+\infty \qquad (+\infty-1\to+\infty)$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} 2x-\frac{e^x}{e^x-1}=-\infty \qquad (-\infty-0\to-\infty)$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} 2x-\frac{e^x}{e^x-1}=-\infty \qquad \left(0-\frac{1}{0^+}\to-\infty\right)$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} 2x-\frac{e^x}{e^x-1}=+\infty \qquad \left(0-\frac{1}{0^-}\to+\infty\right)$$

**2**

لدينا :

$$\forall x\in Df \qquad f'(x)=2-\frac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=2-\frac{e^x(e^x-1)-e^x.e^x}{(e^x-1)^2}=2-\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}}{(e^x-1)^2}=2+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

منه : $f'(x)>0$ $\quad \forall x\in Df$ ، منه :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | \|\| | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | \|\| | $-\infty \nearrow +\infty$ |

**3**

لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ و

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x-\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty} 2-\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}}{x}=2-0=2 \qquad \left(\frac{1}{+\infty}\to 0\right)$$

و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -\dfrac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=\dfrac{-1}{1-0}=-1$ ، إذن $Cf$ يقبل مقاربا مائلا معادلته : $(\Delta_1):\ y=2x-1$

و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=-\infty$ و

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x-\frac{e^x}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\mapsto-\infty} 2-\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{x}=2-0=2 \qquad \left(\frac{0}{-\infty}\to 0\right)$$

و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} -\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{-0}{0-1}=0$ ، إذن $Cf$ يقبل مقاربا مائلا معادلته : $(\Delta_2):\ y=2x$

السؤال هنا يتطلب إجراء كل مراحل تحديد الفروع اللانهائية، لكن إن كان السؤال يطلب فقط البرهان على كون مستقيم هو مقارب مائل سنحسب نهاية واحدة فقط في هذه الحالة كما هو الحال في السؤال الرابع من التمرين الموالي، لكننا آثرنا طرح السؤال بهذه الطريقة للتذكير بهذه المراحل فهي جد مهمة

**4**

لنبين أن : $f(2\times 0-x)=2\times\left(\frac{-1}{2}\right)-f(x)$ أي : $f(-x)=-1-f(x)$

لدينا : $f(-x)+f(x)=-2x-\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}+2x-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}=-\frac{\frac{1}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}-1}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$

$f(-x)+f(x)=\frac{-1}{1-e^{x}}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{1-e^{x}}{e^{x}-1}=-1$

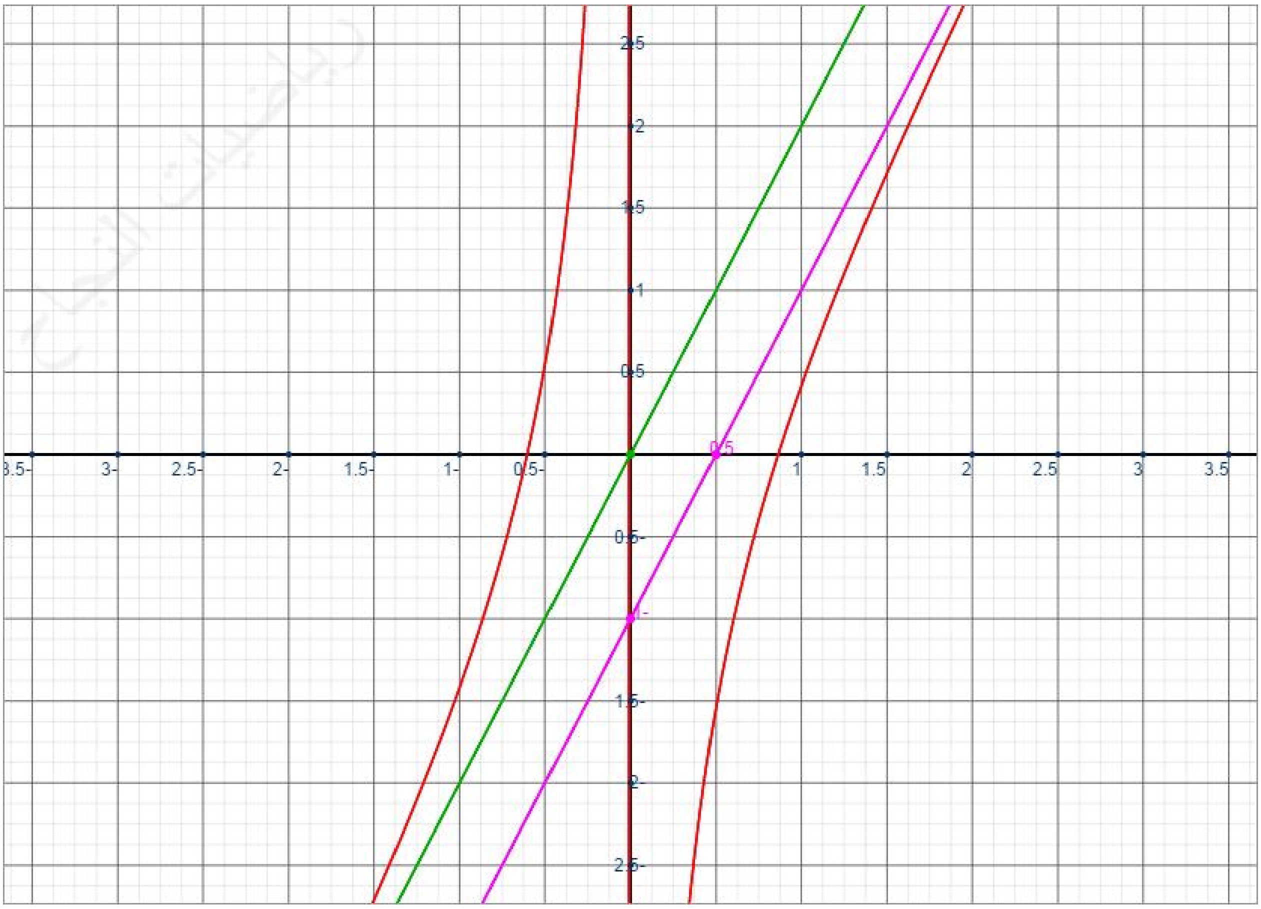
منه : $f(-x)=-1-f(x)$

إذن النقطة $A\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ هي مركز تماثل للمنحنى $Cf$

للتذكير النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل يعني $f(2a-x)=2b-f(x)$

المستقيم $(\Delta): x=a$ محور تماثل يعني : $f(2a-x)=f(x)$

**5**



**تمرين 6** : $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x$

**1** نعلم أن : $e^{2x}>0$ $\forall x\in IR$ إذن منه $Df=IR$

**2** $\left(\ln(0+1)=0\ ;\ 0-(-\infty)\to+\infty\right)$ $\quad \lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} \ln\left(e^{2x}+1\right)-x=+\infty$

**3** لدينا : $\forall x\in IR \quad f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x=\ln\left(e^{2x}+1\right)-\ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}\right)=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

منه : $f(-x)=\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)=f(x)$ $\forall x\in IR$ بالتالي $f$ دالة زوجية

**4**

$\forall x\in IR \quad f(x)-x=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x-x=\ln\left(e^{2x}+1\right)-2x=\ln\left(e^{2x}+1\right)-\ln\left(e^{2x}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)$

أ) لدينا : $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)-x=\lim_{x\mapsto+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)=\ln(1+0)=0$ إذن المستقيم $(\Delta): y=x$ هو مقارب مائل للدالة $f$ جوار $+\infty$

ب لدينا : $f(x)-x=\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)$ ، بما أن : $\frac{1}{e^{2x}}>0$ فإن : $1+\frac{1}{e^{2x}}>1$ منه : $\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)>0$

منه $f(x)-x>0$ ما يعني أن $Cf$ فوق $(\Delta)$

5 لدينا : $\forall x\in IR \quad f'(x)=\left(\ln\left(e^{2x}+1\right)-x\right)'=\frac{\left(e^{2x}+1\right)'}{e^{2x}+1}-1=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}-1=\frac{2e^{2x}-e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

6 لدينا $\forall x\in IR \quad e^{2x}+1>0$

ولدينا : $x=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0$ و $x>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow e^{2x}>1 \Leftrightarrow e^{2x}-1>0$

بالتالي :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $\ln 2$ | ↗ $+\infty$ |

7