

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

### مذكرة رقم 5 في درس الدوال الأصلية

#### محتوى البرنامج

- الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال
- الدوال الأصلية لمجموع دالتين
- الدوال الأصلية لجداء دالة وعدد حقيقي

#### القدرات المنتظرة

- تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية
- استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال

#### I. الدوال الأصلية لدالة:

##### 1) دالة أصلية لدالة على مجال:

**نشاط:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كالتالي:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

1. حدد دالة  $F$  قابلة للاشتقاق

$$\text{على } \mathbb{R} \text{ بحيث } F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R});$$

2. هل توجد دالة أخرى  $G$  بحيث  $G'(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R});$

3. كم توجد من دالة  $F$  بحيث  $F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R});$  ؟

**نشاط: 1)** الدالة المعرفة كالتالي :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \quad \text{قابلة للاشتقاق}$$

$$\text{على } \mathbb{R} \text{ وتحقق } F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R});$$

نقول أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

(2) الدالة المعرفة كالتالي :

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2 \quad \text{قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ وتحقق أيضا}$$

$$G'(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R});$$

نقول أن  $G$  هي دالة أصلية أخرى للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

(3) هناك عدد لا منته من الدوال الأصلية للدالة  $f$

ونقول مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي

$$\text{الدوال المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بما يلي: } x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + k$$

حيث  $k$  عدد حقيقي.

**تعريف:** لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$

نسمي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$  ، كل دالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $I$

$$\text{و مشتقتها } f \text{ هي، أي } F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in I);$$

**خاصية 1:** لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$  ، و  $F$  دالة أصلية

للدالة على  $I$  ،

الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  هي الدوال المعرفة على  $I$  بما يلي :

$$x \mapsto F(x) + k \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي.}$$

**خاصية 2:** لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$  و  $x_0$  عنصرا من

$I$  و  $y_0$  عددا حقيقيا معلوما.

إذا كانت  $f$  دالة تقبل دالة أصلية على  $I$  فإنه توجد دالة أصلية وحيدة

$$G \text{ للدالة } f \text{ على } I \text{ بحيث: } G(x_0) = y_0$$

**البرهان:** إذا كانت  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$  ، فإن جميع الدوال

$$\text{الأصلية للدالة } f \text{ معرفة على } I \text{ بما يلي: } G(x) = F(x) + k$$

حيث  $k$  عدد حقيقي. الشرط  $G(x_0) = y_0$  يعني  $F(x_0) + k = y_0$  أي

$$k = y_0 - F(x_0)$$

إذن توجد دالة أصلية وحيدة  $G$  للدالة  $f$  على  $I$  معرفة بما يلي:

$$G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$$

**خاصية 3:** كل دالة متصلة على مجال  $I$  تقبل دالة أصلية على  $I$  .

**خاصية 4:** لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين معرفتين على مجال  $I$  ، و  $k$

عددا حقيقيا.

إذا كانت  $F$  و  $G$  دالتين أصليتين، على التوالي للدالتين  $f$  و  $g$  على  $I$

فإن :

$$\blacksquare \text{ الدالة } F + G \text{ دالة أصلية للدالة } f + g \text{ على } I .$$

$$\blacksquare \text{ الدالة } kF \text{ دالة أصلية للدالة } kf \text{ على } I .$$

**مثال:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كالتالي:

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

1. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$

2. حدد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  بحيث  $F(1) = 3$

$$\text{أجوبة: الأجوبة: 1: } f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{انن : } F(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^{2+1} + \frac{1}{2}x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + k$$

$$F(1) = 3(2 \times \frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k) = 3$$

$$\text{يعني } \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 + k = 3 \text{ يعني } \frac{7}{6} + k = 3$$

**أمثلة:** حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1 \quad (2) \quad f(x) = 5x^4 + 3x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} \quad (5) \quad f(x) = (2x-1)^3 \quad (4) \quad f(x) = \sin x + x \cos x \quad (3)$$

**أجوبة: (1)**  $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

اذن  $F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1 \quad (2)$$

اذن  $F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x(\sin x)' \quad (3)$$

اذن  $F(x) = x \times \sin x + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2} (2x-1)' (2x-1)^3 \quad (4)$$

اذن  $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x-1)^{3+1} + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

ومنه  $F(x) = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \quad \text{يعني} \quad f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2} \quad (5)$$

اذن  $F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

**تمرين 1:** حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = 2\cos x - \sin x - 3 \quad (2) \quad f(x) = 8x^3 + 4x^2 + x + 6 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^2} \quad (5) \quad f(x) = (4x+5)^2 \quad (4) \quad f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x \quad (3)$$

**أجوبة:**

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 + x + 6 \quad (1)$$

اذن  $F(x) = 8 \times \frac{1}{4} x^4 + 4 \times \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x + k = 2x^4 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x + k$

حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2\cos x - \sin x - 3 \quad (2)$$

حيث  $k \in \mathbb{R}$   $f(x) = 2\sin x + \cos x - 3x + k$

$$f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' \quad (3)$$

اذن  $F(x) = x^2 \times \sin x + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (4x+5)^2 \quad (4)$$

$$f(x) = (4x+5)^2 = \frac{1}{4} (4x+5)' (4x+5)^2$$

اذن  $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} (4x+5)^{2+1} + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

ومنه  $F(x) = \frac{1}{12} (4x+5)^3 + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -\frac{1}{3} \left( -\frac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} \right) \quad \text{يعني} \quad f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^2} \quad (5)$$

اذن  $F(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{3x^3+2} + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

**مثال:** حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (2) \quad f(x) = 2\sqrt{2x+1} \quad (1)$$

**أجوبة: (1)**  $f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$k = \frac{11}{6} \quad \text{يعني} \quad k = 3 - \frac{7}{6}$$

ومنه الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  بحيث  $F(1) = 3$

هي الدالة المعرفة كالتالي :  $F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$

## II. جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية:

انطلاقاً من القراءة العكسية لجدول مشتقات الدوال الاعتيادية نحصل على الجدول التالي:

الدالة $f$	الدوال الأصلية للدالة $f$ على مجال $I$
$x \mapsto k; k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c; c \in \mathbb{R}$
الدالة $f$	الدوال الأصلية للدالة $f$ على مجال $I$
$x \mapsto x^n; n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}; n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^r; r \in (\mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c; c \in \mathbb{R}$

## III. الدوال الأصلية و العمليات:

انطلاقاً من القراءة العكسية للعمليات على الدوال المشتقة حصلنا على الجدول أسفله:

دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $I$	الدالة $f$ معرفة على مجال $I$
$u + v$	$u' + v'$
$uv$	$uv' + vu'$
$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$u'u^n; n \in \mathbb{N}^*$
$-\frac{1}{u}$	$\frac{u'}{u^2}$
$u \frac{1}{r+1} u^{r+1}$	$u'u^r; r \in (\mathbb{Q}^* - \{-1\})$
$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$x \mapsto \frac{1}{a} u(ax+b)$	$x \mapsto u'(ax+b); a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}$

#### تمرين 4: نعتبر الدالة $f$

المعرفة على  $[1; +\infty[$  كالتالي:  $f(x) = x\sqrt{x-1}$

1. بين أن:  $\forall x \in [1; +\infty[ f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1}$

2. حدد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  بحيث  $F(2) = 1$

#### أجوبة:

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = |x-1| \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} \quad (1)$$

نعلم أن:  $x \in [1; +\infty[$  إذن:  $x \geq 1$  يعني  $x-1 \geq 0$

ومنه:  $|x-1| = x-1$

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = (x-1) \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} - 1\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$f(x) = ((x-1)^3)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

ومنه  $k \in \mathbb{R}$  حيث  $F(x) = \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + k$

#### تمرين 7: نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$$f(x) = \frac{5x^4 + 40x^2 + 20x + 80}{(x^2 + 4)^2}$$

1. حدد الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c \quad \text{بحيث}$$

2. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $f$

3. حدد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  بحيث  $F(0) = c$

#### أجوبة:

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c = \frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2} = \frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$$f(x) = \frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{(x^2+4)^2}$$

$$f(x) = \frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2} \quad \text{بالمقارنة مع الكتابة:}$$

$$f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5 \quad \text{ومنه:} \begin{cases} c=5 \\ c=5 \text{ يعني } 8c=40 \\ a=20 \\ b=0 \end{cases} \quad \text{نجد أن:} \begin{cases} c=5 \\ 8c=40 \\ a=20 \\ b+16c=80 \end{cases}$$

$$f(x) = 10 \frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} + 5 \quad \text{يعني} \quad f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5 \quad (2)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad k \in \mathbb{R} \quad F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + k \quad \text{ومنه:}$$

$$F(0) = 5 \quad \text{يعني} \quad -\frac{10}{4} + k = 5 \quad \text{يعني} \quad k = 5 + \frac{5}{2} \quad \text{يعني} \quad k = \frac{15}{2} \quad (3)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + \frac{15}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1} + k \quad \text{إذن} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{حيث}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + k \quad \text{ومنه} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{حيث}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(\sqrt{2x+1})^3 + k \quad \text{ومنه} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{حيث}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} + k \quad \text{إذن} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{حيث}$$

#### تمرين 2: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية:

$$f(x) = \sin(4x-1) \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} \quad (2) \quad f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sin x)^2 \cos x \quad (5) \quad f(x) = \cos(2x+8) \quad (4)$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{أجوبة: (1)}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k \quad \text{إذن}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + k \quad \text{ومنه} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{حيث}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} = \frac{2}{3} \frac{(8+x^3)'}{2\sqrt{8+x^3}} \quad (2)$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{8+x^3} + k \quad \text{إذن} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{حيث}$$

$$f(x) = \sin(4x-1) \quad \text{إذن} \quad F(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x-1) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos(2x+8) \quad \text{إذن} \quad F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+8) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = (\sin x)^2 \cos x \quad \text{يعني} \quad f(x) = (\sin x)^2 \cos x \quad (5)$$

$$F(x) = \frac{1}{2+1}(\sin x)^{2+1} + k \quad \text{ومنه}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + k \quad \text{يعني} \quad k \in \mathbb{R}$$

#### تمرين 3: نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \text{كالتالي:}$$

1. حدد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث:

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$$

2. حدد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  بحيث  $F(1) = \frac{5}{2}$

#### أجوبة: (1)

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \text{بالمقارنة مع الكتابة:}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{ومنه:} \begin{cases} a=1 \\ a=1 \text{ يعني } 2a=2 \\ b=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \quad \text{يعني} \quad f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad k \in \mathbb{R} \quad F(x) = x + \frac{1}{x+1} + k \quad \text{ومنه:}$$