

### نحدد الدوال الأصلية للدالة f

رقم	دالة f	دوال الأصلية F للدالة f مع $c \in \mathbb{R}$	حيث تعريفها
1	$f(x) = 8x^7 - 12x^4 - 14x^3 - 6x + 5$	$F(x) = x^8 - \frac{12}{5}x^4 - \frac{7}{2}x^3 - 3x + 5x + c$	$\mathbb{R}$
2	$f(x) = -4x^5 + \frac{2}{x^2} + 3$	$F(x) = -\frac{2}{3}x^6 - \frac{2}{x} + 3x + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
3	$f(x) = (x+8)^2 + 1$ $= (x+8)'(x+8)^2 + 1$	$F(x) = \frac{1}{3}(x+8)^3 + 3x + c$	$\mathbb{R}$
4	$f(x) = (11x+1)^5 - 2x$ $= \frac{1}{11}(11x+1)'(11x+1)^5 - 2x$	$F(x) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{6}(11x+1)^6 - x^2 + c$	$\mathbb{R}$
5	$f(x) = (2x^3 - 9)^2 + 7x^2$ $= 4x^6 - 36x^3 + 81$	$F(x) = \frac{4}{7}x^7 - 9x^4 + 81x + c$	$\mathbb{R}$
6	$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \frac{5}{2} \times \sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
7	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{(2x+4)'}{2 \times \sqrt{2x+4}}$	$F(x) = \sqrt{2x+4}$	$]-2; +\infty[$
8	$f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{x^8+1}}$ $= \frac{1}{8}(x^8+1)'(x^8+1)^{-\frac{1}{2}}$	$F(x) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x^8+1)^{-\frac{1}{2}+1} + c$ $= \frac{1}{4}\sqrt{x^8+1} + c$	$\mathbb{R}$
9	$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$	$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1} + c$ $= \frac{4}{5} \times \sqrt[4]{x^5} + c$	$\mathbb{R}^+$
10	$f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$	$F(x) = \frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1} + c$ $= \frac{3}{8} \times \sqrt[3]{x^8} + c$	$\mathbb{R}^+$
11	$f(x) = \sqrt[3]{2x-8}$ $= \frac{1}{2}(2x-8)'(2x-8)^3$	$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(2x-8)^4 + c$ $= \frac{1}{8}(2x-8)^4 + c$	$]4; +\infty[$

	$F(x) = \frac{1}{5} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (5x^8 - 7)^{\frac{1}{2}+1} + c$ $= \frac{2}{15} (5x^8 - 7)^{\frac{3}{2}} + c$ $= \frac{2}{15} \sqrt{(5x^8 - 7)^3} + c$	$f(x) = x^7 \cdot \sqrt{5x^8 - 7}$ $= \frac{1}{5} (5x^8 - 7)' (5x^8 - 7)^{\frac{1}{2}}$	12
$\mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{3}{4} \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 \times \frac{1}{2} \sin(2x - \pi) + c$	$f(x) = 3 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 \cos(2x - \pi)$	13
$\mathbb{R}$	$F(x) = -3 \times \frac{1}{5} \cos x^5 + c$	$f(x) = 3x^4 \sin x^5 = 3 \times \frac{1}{5} (x^5)' \sin x^5$	14
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$	15
$\mathbb{R}$	$f(x) = -\frac{1}{4} \cos^4 x + c$	$f(x) = \sin x \cos^3 x = -(\cos x)' \cos^3 x$	16
أو $]3; +\infty[$ أو $]2; 3[$ أو $] -\infty; 2[$	$F(x) = \frac{1}{9} (x^2 - 5x + 6)^9 + c$	$f(x) = \frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^8}$ $= (x^2 - 5x + 6)' (x^2 - 5x + 6)^{-8}$	17
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$f(x) = -4 \cos^{-4} x + c = \frac{-4}{\cos^4 x} + c$	$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^5 x} = -(\cos x)' \cos^{-5} x$	18
أو $]0; +\infty[$ أو $] -\infty; 0[$	$F(x) = \frac{1}{6} x^6 - 3x + \frac{5}{x} + c$	$f(x) = \frac{x^7 - 3x^2 - 5}{x^2} = x^5 - 3 - \frac{5}{x^2}$	19

01. نحدد الدوال الأصلية لدالة التالية:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \sqrt{x-1} + 2 \times \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= (x-1)' (x-1)^{\frac{1}{2}} + 2 \times \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}$$

ومنه:

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x-1)^{\frac{1}{2}+1} + 2 \times \sqrt{x-1} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2 \times \sqrt{x-1} + c$$

**خلاصة:** الدوال الأصلية لدالة التالية:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$  هي على شكل  $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2 \times \sqrt{x-1} + c$ .

### .03

**.01** هل الدالتين  $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$  و  $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$  أصليتين لنفس الدالة  $f(x)$  ؟

نعتبر  $G(x)$  دالة أصلية ل  $f(x)$   
لدينا:

$$F(x) = G(x) \text{ ومنه } F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2 = \frac{1}{6}(9x^2 + 24x + 16) = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3} = G(x) + \frac{4}{3}$$

ومنه:  $F(x) = G(x) + \frac{4}{3}$  إذن  $F(x)$  دالة أصلية ل  $f(x)$ .

**خلاصة:** الدالتين  $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$  و  $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$  أصليتين لنفس الدالة  $f(x)$

### .04

**.01**  $F$  دالة أصلية ل  $f$  حدد  $f(x)$ .

**أ-**  $F(x) = 3x^4 - 2x + 5$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (3x^4 - 2x + 5)' = f(x) \text{ ومنه: } f(x) = 12x^3 - 2$$

**خلاصة:**  $f(x) = 12x^3 - 2$

**ب-**  $F(x) = -x + \frac{3}{x}$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(-x + \frac{3}{x}\right)' = f(x) \text{ ومنه: } f(x) = -1 - \frac{3}{x^2}$$

**خلاصة:**  $f(x) = -1 - \frac{3}{x^2}$

**ج-**  $F(x) = 5\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(5\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)' = f(x) \text{ ومنه: } f(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2x^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^3}} = f(x)$$

**خلاصة:**  $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

**د:**  $F(x) = 2 \sin(3x) + 7 \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(2 \sin(3x) + 7 \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = f(x)$  : دالة أصلية ل  $f$  و منه :

$$\Leftrightarrow 6 \cos(3x) - 35 \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

**خلاصة:**  $f(x) = 6 \cos(3x) - 35 \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$

## 05

**01.** نعتبر الدالة العددية المعرفة على  $]0, +\infty[$  ب :  $G(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{5}$  . حدد الدالة الأصلية  $F$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  و التي تنعدم في -1 .

الدوال الأصلية لدالة التالية :  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - 7$  هي على شكل :  $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x + c$

$$F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}(-1)^3 - \frac{3}{-1} - 7(-1) + c = 0$$

من جهة أخرى :

$$\Leftrightarrow c = -\frac{119}{12}$$

و بالتالي :  $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$

**خلاصة:** حدد الدالة الأصلية  $F$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  و التي تنعدم في -1 هي :  $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$

**02.** نعتبر الدالة العددية المعرفة على  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  ب :  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$  . حدد الدالة الأصلية  $F$  المعرفة على  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  و

$$F(0) = 1$$

الدوال الأصلية لدالة التالية :  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$  هي على شكل :  $F(x) = \tan x + \sin x + c$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \tan 0 + \sin 0 + c = 1$$

من جهة أخرى :

$$\Leftrightarrow c = 1$$

و بالتالي :  $F(x) = \tan x + \sin x + 1$

**خلاصة:** حدد الدالة الأصلية  $F$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  و التي تنعدم في -1 هي  $F(x) = \tan x + \sin x + 1$

06

01. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  ب:  $f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3}$ .

أ- نحدد  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  حيث:  $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$ .

لدينا:

$$f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \frac{3x+4}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^3} = \frac{ax+a+b}{(x+1)^3}$$

ومنه:  $a=3$  و  $a+b=4$  أي  $a=3$  و  $b=1$ .

خلاصة:  $a=3$  و  $b=1$  و  $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

طريقة 2:

لدينا:

$$f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3} = \frac{3x+3+1}{(x+1)^3} = \frac{3x+3}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{3(x+1)}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

خلاصة:  $a=3$  و  $b=1$  و  $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

أ- نستنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$ .

$$f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} = 3(x+1)'(x+1)^{-2} + (x+1)'(x+1)^{-3}$$

إذن: دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$  هي:  $F(x) = -3(x+1)^{-1} - \frac{1}{2}(x+1)^{-2} = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$ .

خلاصة: دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$  هي:  $F(x) = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$

07

01. نعتبر الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$  حدد الدالة الأصلية  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  و

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

نحدد الدالة الأصلية  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  و  $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ .

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x \\ &= \cos x \sin^2 x - 3\cos x \sin x + 8\cos x \\ &= (\sin x)' \sin^2 x - 3(\sin x)' \sin x + 8\cos x \end{aligned}$$

ومنه : الدوال الأصلية لدالة f هي :  $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2 x + 8\sin x + c$

من جهة أخرى :  $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(-1)^3 - 3 \times \frac{1}{2}(-1)^2 + 8(-1) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{59}{6}$$

ومنه :  $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2 x + 8\sin x - \frac{59}{6}$

**خلاصة :** الدالة الأصلية للدالة f على  $\mathbb{R}$  حيث :  $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$  هي :  $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2 x + 8\sin x - \frac{59}{6}$