

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 6 في درس الدوال اللوغاريتمية

محتوى البرنامج

- دالة اللوغاريتم النبيري.
- تعريف وخصائص جبرية
- الرمز Ln: و دراسة دالة اللوغاريتم النبيري.
- نهايات اعتيادية
- المشتقة اللوغاريتمية
- دالة اللوغاريتم للأساس a.
- تعريف وخصائص جبرية
- دالة اللوغاريتم العشري

القدرات المنتظرة

- التمكن من الحساب الجبري على اللوغاريتمات
- التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمت لوغاريتمية
- معرفة وتطبيق اللوغاريتم العشري (خاصة في حل معادلات من نوع: $10^x = a$)
- التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية وتوظيفها
- التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغتها على دالة اللوغاريتم

نبحث عن الجذور $x^2 - 3x + 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان لثلاثية الحدود جذرين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{3+1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

نحدد جدول الإشارة:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

ومنه: $D_g =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\} \text{ يعني } h(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (3)$$

$$D_h =]0; 1[\cup]1; +\infty[\text{ : ومنه } x=1 \text{ يعني } \ln x = \ln 1$$

خاصية: لكل a و b من $]0; +\infty[$ لدينا: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

لكل a و b من $]0; +\infty[$ لدينا: $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

أمثلة: حل في \mathbb{R} المعادلات و المتراجحات التالية:

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \quad (2) \quad \ln(x-2) = 0 \quad (1)$$

$$\ln(x-1) \geq 0 \quad (3)$$

أجوبة: (1) $\ln(x-2) = 0$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان: $x-2 > 0$

يعني إذا كان: $x > 2$ إذن: $D_E =]2; +\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(x-2) = \ln(1) \text{ يعني } \ln(x-2) = 0$$

I. دالة اللوغاريتم النبيري

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$, إذن تقبل دوال أصلية

على $]0; +\infty[$, و تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1

تعريف: دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة: $x \rightarrow \frac{1}{x}$

على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم في 1, و نرمز لها بالرمز \ln .

نتائج

■ مجموعة تعريف الدالة \ln هي: $]0; +\infty[$.

$$\ln 1 = 0$$

■ الدالة \ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

■ الدالة \ln تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$

■ لكل a و b من $]0; +\infty[$, $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$.

إشارة الدالة Ln

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{و} \quad \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{و} \quad \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

مثال 1:

حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

$$h: x \rightarrow \frac{x}{\ln x} \quad (3) \quad g: x \rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2) \quad (2) \quad f: x \rightarrow \ln(x+1) \quad (1)$$

أجوبة: (1) $f(x) = \ln(x+1)$ يعني $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\}$

$$D_f =]-1; +\infty[\text{ ومنه } x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) \quad (2)$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 0\}$$

خصائص جبرية

• a و b من $]0; +\infty[$ لدينا: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

• **خاصية:** لكل a و b من $]0; +\infty[$ ولكل r من \mathbb{Q} لدينا:

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln(a^r) = r \ln a$$

أمثلة: إذا علمت أن $\ln(2) \approx 0,7$ و $\ln(3) \approx 1,1$

فاحسب ما يلي: $\ln(6)$, $\ln(4)$, $\ln(8)$, $\ln(72)$

$$\ln(3\sqrt{2}), \ln(\sqrt{6}), \ln(\sqrt{2}), \ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$, A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}}, \ln(12\sqrt[3]{3})$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27}$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2015}$$

الحل

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,7 + 1,1 = 1,8$$

$$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2^2) = 2 \ln(2) \approx 2 \times 0,7 = 1,4$$

$$\ln(8) = \ln(2 \times 2 \times 2) = \ln(2^3) = 3 \ln(2) \approx 3 \times 0,7 = 2,1$$

$$\ln(72) = \ln(3^2 \times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$$

$$\ln(72) \approx 2 \times 1,1 + 3 \times 0,7 \approx 2,2 + 2,1 = 4,3$$

$$\text{و} \quad \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) \approx 1,1 - 0,7 \approx 0,4$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,7$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} \times 1,8 = 0,9$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) = 1,1 + \frac{1}{2} \ln(2) = 1,1 + \frac{0,7}{2} = 1,1 + 0,35 = 1,45$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln(3 \times 2^2) + \ln(\sqrt[3]{3}) = \ln(3) + 2 \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3) + 2 \ln(2) + \frac{1}{3} \ln(3)$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) \approx 1,1 + 1,4 + \frac{1}{3} \times 1,1 = 2,86$$

$$A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}} = \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)$$

$$A = \ln\left(\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 = 0,35$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27} = \frac{1}{4} \ln 3^4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln\frac{1}{3^3} = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + 3 \ln 3$$

$$B \approx 1,1 + \frac{1,1}{2} + 3 \times 1,1 = 4,95$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2015} = \ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2015} \times \left(\sqrt{2}-1\right)^{2015}\right)$$

$$C = \ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^{2015} = \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2\right)^{2015} = 2015 \ln(1) = 2015 \times 0 = 0$$

تمرين 3: بسط

$$B = \ln(0,01) - \ln(1000) + \ln(10^6) \quad (2) \quad A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) \quad (1)$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) = \ln(3) - \ln(5) + \ln(3 \times 5) \quad (\text{الجواب: 1})$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln 3 + \ln 5 = 2 \ln(3) = \ln(3^2) = \ln(9)$$

يعني $x-2=1$ يعني $x=3 \in D_E$ ومنه $S = \{3\}$

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \quad (2)$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $5x-10 > 0$ و $3x-1 > 0$

يعني إذا كان: $x > 2$ و $x > \frac{1}{3}$ إذن: $D_E =]2; +\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$3x-1 = 5x-10 \quad \text{يعني} \quad \ln(3x-1) = \ln(5x-10)$$

$$S = \left\{ \frac{9}{2} \right\} \quad \text{يعني} \quad -2x = -9 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{9}{2} \in D_E \quad \text{ومنه}$$

$$\ln(2x-6) \geq 0 \quad (3)$$

المرحلة 1: هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-6 > 0$

يعني إذا كان: $x > 3$ إذن: $D_E =]3; +\infty[$

المرحلة 2: حل المتراجحة:

$$\ln(2x-6) \geq \ln 1 \quad \text{يعني} \quad \ln(2x-6) \geq 0$$

يعني $2x-6 \geq 1$ يعني $x \geq \frac{7}{2}$ يعني $x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty[$

ومنه $S = \left[\frac{7}{2}; +\infty[\cap]3; +\infty[=]3; +\infty[$

تمرين 1: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \quad (2) \quad \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \quad (1)$$

الجواب:

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \quad (1)$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-1 > 0$ و $1-x > 0$

يعني إذا كان: $x > \frac{1}{2}$ و $x < 1$ إذن: $D_E = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(2x-1) = \ln(1-x) \quad \text{يعني} \quad \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\} \quad \text{يعني} \quad 2x-1=1-x \quad \text{يعني} \quad 3x=2 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{2}{3} \in D_E \quad \text{ومنه}$$

$$\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \quad (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x > 0$ و $x^2 + 1 > 0$ يعني

إذا كان: $x > 0$ إذن: $D_E =]0; +\infty[$

ليكن x من $]0; +\infty[$ $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1$

$$x = 1 \in D_E \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{1\}$

تمرين 2: حل في \mathbb{R} المتراجحة: $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

الجواب: **المرحلة 1:** هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$x-1 > 0 \quad \text{و} \quad 3x+1 > 0 \quad \text{أي} \quad \left(x > -\frac{1}{3}; x > 1 \right) \quad \text{يعني} \quad x > 1$$

المرحلة 2: حل المعادلة:

المرحلة 2: حل المتراجحة: ليكن x من $]1; +\infty[$

$$\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) < \ln(3x+1)$$

$$x > -1 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x-1 < 3x+1$$

إذن: $S =]1; +\infty[\cap]-1; +\infty[=]1; +\infty[$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = 5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty \quad \text{الجواب: (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty : \text{شكل غير محدد لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(2 + \frac{1}{\ln x} \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (\ln(x) - 1) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x (\ln(x) + 1) = +\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + 1 = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

2. جدول تغيرات الدالة $x \rightarrow \ln(x)$:

$$\text{لدينا: } (\forall x \in]0, +\infty[) : l' n'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{بما أن } x > 0 \text{ فإن } l' n'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

و بالتالي الدالة \ln تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$ ومنه الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\text{نتائج: } \ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$$

المعادلة $\ln(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً في $]0, +\infty[$ نرمز لهذا الحل

بالرمز e ولكل عدد جذري k , لدينا: $\ln(e^k) = k$.

العدد e : $e \approx 2,71828 \dots$ هو العدد الحقيقي الذي يحقق

$$\ln(e) = 1$$

$$\text{أمثلة: (1) } \ln(e^3) = 3 \text{ و } 7 = \ln(e^7)$$

$$(2) \text{ حل المعادلة } \ln(x) = 7 \text{ يعني } \ln(x) = 7 \ln(e) \text{ يعني } x = e^7$$

$$S = \{e^7\}$$

تمرين 5: أحسب وبسط:

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9) \quad A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \ln(e) + 4 \ln(e) - \ln(e) \quad \text{الجواب: (1)}$$

$$A = 2 \times 1 + 4 \times 1 - 1 = 7$$

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9) = 2 \times \frac{1}{2} \ln(e) + \ln(e) + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \times 9 \ln(e)$$

$$B = 1 \ln(e) + \ln(e) + \frac{1}{2} \ln(e) - 3 \ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

تمرين 6: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad (2) \quad \ln(2x-1) = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$B = \ln(10^2) - \ln(10^3) + \ln(10^6) = -2 \ln(10) - 3 \ln(10) + 6 \ln(10)$$

$$B = \ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$$

تمرين 4: حل في \mathbb{R} المعادلة و المتراحة التالية:

$$\ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \quad (2) \quad \ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3 \quad (1)$$

الإجابة: (1) يعني $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

$$\text{يعني } \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x > 0$ و $x-1 > 0$ يعني $x > 1$ إذن: $D_E =]1, +\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(x(x-1)) = \ln 6 \text{ يعني } \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$$

$$\text{يعني } x(x-1) = 6 \text{ يعني } x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$S = \{3\} \quad \text{و} \quad x_2 = -2 \notin]1, +\infty[\quad \text{فإن } x_2 = -2 \notin]1, +\infty[$$

$$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \quad (2)$$

المرحلة 1: هذه المتراحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$x > \frac{5}{2} \text{ و } x+1 > 0 \text{ أي } 2x-5 > 0 \text{ و } x > -1 \text{ يعني } x > \frac{5}{2}$$

$$\text{ومنه: } D_I = \left] \frac{5}{2}, +\infty \right[$$

المرحلة 2: حل المتراحة: ليكن x من $\left] \frac{5}{2}, +\infty \right[$

$$\ln((2x-5)(x+1)) \leq \ln 4 \Leftrightarrow \ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$$

$$2x^2 - 3x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (2x-5)(x+1) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = -\frac{3}{2} \text{ و } x_1 = 3 \text{ يعني } x_2 = \frac{3-9}{2 \times 2} \text{ و } x_1 = \frac{3+9}{2 \times 2}$$

x	$-\infty$	$-3/2$	3	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 9$		+	-	+

$$\text{إذن: } S = \left[-\frac{3}{2}, 3 \right] \cap \left] \frac{5}{2}, +\infty \right[= \left] \frac{5}{2}, 3 \right]$$

II. دراسة الدالة \ln

1. نهايات اعتيادية

$$\text{خاصية 1: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{خاصية 2: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\text{برهان على الخاصية 2: نضع } X = \frac{1}{x}$$

$$X \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = -\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{خاصية 3: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{أمثلة: أحسب النهايات التالية: (1) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x}$$

$$X = \frac{1}{x} : \text{نضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x = 0$$

$$X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X) = \lim_{0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty : \text{لأن}$$

$$X = \sqrt{x} : \text{نضع } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 \quad (5)$$

$$X^2 = x \Leftrightarrow X^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow X = \sqrt{x}$$

$$X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = \lim_{0^+} X^2 (\ln(X^2))^2 = \lim_{0^+} X^2 (2 \ln X)^2 = \lim_{0^+} 4X^2 (\ln X)^2$$

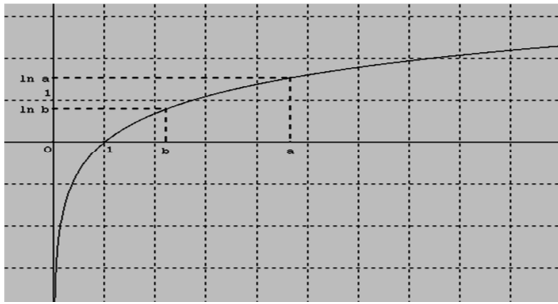
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = 4 \lim_{0^+} (X \ln X)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

4. الفروع اللانهائية

لدينا: إذن منحنى الدالة \ln يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$. ولدينا محور الأراتيب مقارب لمنحنى الدالة \ln .

5. انشاء منحنى الدالة.



III. المشتقة اللوغاريتمية لدالة

تعريف

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على I ($(\forall x \in I); u(x) \neq 0$).

الدالة: $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ (حيث u' هي الدالة u) تسمى المشتقة

اللوغاريتمية للدالة u على المجال I .

مثال لتحديد المشتقة اللوغاريتمية للدالة: $u: x \rightarrow 3x^2 + 5$.

الدالة $u: x \rightarrow 3x^2 + 5$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لا تنعدم على \mathbb{R} .

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}); u'(x) = 6x$ إذن المشتقة اللوغاريتمية

للدالة u على \mathbb{R} هي الدالة: $x \rightarrow \frac{6x}{3x^2 + 5}$.

خاصية 1

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على I

فان الدالة $f: x \rightarrow \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على المجال I

و دالتها المشتقة هي المشتقة اللوغاريتمية للدالة u

يعني: $(\forall x \in I); f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال 1: أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = \ln(1+x^2) \quad \text{و} \quad f(x) = x \ln x \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - \ln x$$

$$f'(x) = (x^2 - \ln x)' = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} : \text{الأجوبة}$$

$$\ln(2x-1) = \frac{3}{2} \quad (\text{الجواب: 1})$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان: $2x-1 > 0$

$$D_E = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[: \text{يعني } x > \frac{1}{2} \text{ إذن}$$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(2x-1) = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \text{ يعني } \ln(2x-1) = \frac{3}{2} \ln(e) \text{ يعني } \ln(2x-1) = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ يعني } 2x-1 = (\sqrt{e})^3 \text{ يعني } 2x-1 = e^{\frac{3}{2}}$$

$$S = \left\{ \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \right\}$$

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان: $x > 0$

نضع: $\ln x = X$ والمعادلة تصبح: $2X^2 + X - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = -2 \quad \text{و} \quad X_1 = \frac{3}{2} \text{ يعني } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times 2} \quad \text{و} \quad X_1 = \frac{-1 + 7}{2 \times 4}$$

$$\text{يعني } \ln x_2 = -2 \quad \text{و} \quad \ln x_1 = \frac{3}{2} \text{ يعني } x_2 = e^{-2} \quad \text{و} \quad x_1 = e^{\frac{3}{2}}$$

$$S = \left\{ e\sqrt{e}, \frac{1}{e^2} \right\} \text{ ومنه: } x_2 = \frac{1}{e^2} \quad \text{و} \quad x_1 = (\sqrt{e})^3 = e\sqrt{e}$$

تمرين 7: حل في \mathbb{R}^2 النظام

$$\begin{cases} 3 \ln x + \ln y = 2 \\ 2 \ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

الجواب: 1

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد:

$$5 \ln x = 5 \text{ يعني } \ln x = 1 \text{ يعني } x = e$$

نعوض $x = e$ في المعادلة الأولى فنجد: $3 \ln e + \ln y = 2$

$$\text{يعني } \ln y = 2 - 3 \text{ يعني } \ln y = -1 \text{ يعني } y = e^{-1}$$

$$S = \left\{ \left(e; \frac{1}{e} \right) \right\}$$

3. نهايات اعتيادية أخرى

$$\text{خاصية: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = 0 \text{ حيث } n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

مثال: أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x$$

$$X = \sqrt{x} : \text{ضع } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (1) \text{ أجوبة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \text{ حسب الخاصية: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x = 0 \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ مع } F(x) = 2\ln(1-x) + 3\ln(-x-2) + k$$

$$k = \ln 2 - 2\ln(2^2) \text{ يعني } 2\ln(4) + 3\ln(1) + k = \ln 2 \text{ يعني } F(-3) = \ln 2(3)$$

$$F(x) = 2\ln(1-x) + 3\ln(-x-2) - 3\ln 2 : \text{ يعني } k = -3\ln 2 \text{ ومنه}$$

IV. دراسة دالة تحتوي على \ln

مثال:

I. لتكن الدالة العددية g بحيث: $g(x) = x - \ln x$

1. حدد D_g وأحسب نهايات g عند محددات D_g

2. أحسب $g'(x)$ و أعط جدول تغيرات g

3. استنتج أن: $x > \ln x$, $\forall x > 0$

$$\text{II. لتكن الدالة العددية } f \text{ بحيث : } x > 0 : f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$$

$$f(0) = -1$$

1. بين أن $D_f = [0; +\infty[$

2. بين أن f متصلة في الصفر على اليمين

3. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4. بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

5. بين أن: $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$, $\forall x \in]0; +\infty[$

6. أعط جدول تغيرات f

7. حدد نقط تقاطع C_f و المستقيم $y = 1$: (Δ)

8. بين أن C_f يقطع محور الأفاصل في نقطة

أفصولها ينتمي إلى $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9. أنشئ C_f في معلم $(0; i; j)$ (خذ $e \approx 2,7$, $\ln 2 \approx 0,7$)

أجوبة (1): $D_g =]0; +\infty[$ $g(x) = x - \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty$$

$$g'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \quad (2)$$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$: لأن $x \in]0; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3) نلاحظ أن g تقبل قيمة دنيا عند $x_0 = 1$

اذن : $\forall x \in]0; +\infty[$ $g(1) \leq g(x)$: اذن $\forall x \in]0; +\infty[$ $1 \leq x - \ln x$

اذن : $\forall x \in]0; +\infty[$ $0 < 1 \leq x - \ln x$: اذن $\forall x \in]0; +\infty[$ $\ln x < x$

$$x > 0 \text{ و } x - \ln x \neq 0 \text{ يعني دالة معرفة يعني } f \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \quad (1. \text{II}) \\ f(0) = -1 \end{array} \right.$$

وحسب ماسبق وجدنا أن $0 < x - \ln x$ اذن $x - \ln x \neq 0$

ولدينا 0 لديه صورة اذن : $D_f = [0; +\infty[$

$$f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = 1 \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

مثال 2: حدود الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالتين التاليتين:

$$I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} \quad .1$$

$$I =]0; 1[; f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad .2$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} = \frac{1}{4} \frac{(x^4 + 2)'}{x^4 + 2} \text{ لدينا (1: الأجوبة)}$$

$$k \in \mathbb{R} : \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4 + 2| + k$$

$$\text{يعني : } F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + k : \text{ لأن } x^4 + 2 > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{x} = \frac{(x \ln x)'}{x \ln x} \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{R} : \text{ حيث } F(x) = \ln|\ln x| + k$$

تمرين 8: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f و حدد عددين حقيقيين

$$a \text{ و } b \text{ بحيث: } f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} \quad (\forall x \in D)$$

2. استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty; -2[$

3. حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $]-\infty; -2[$ بحيث

$$F(-3) = \ln 2$$

أجوبة: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \neq 0\}$ يعني

$$x^2 + x - 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان لثلاثية الحدود جذرين هما:

$$x_2 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ و } x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ يعني } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$D_f = \mathbb{R} / \{-2; 1\}$$

$$f(x) = \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$ نجد أن :

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases} \text{ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد : } 3a = 6 \text{ يعني}$$

$$a = 2$$

وبتعويض a بقيمتها في المعادلة الأولى نجد أن : $2 + b = 5$ يعني

$$b = 3$$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة f هي :

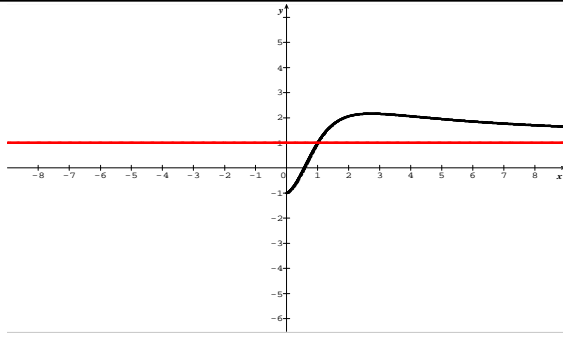
$$(\forall x \in D_f); f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

$$(\forall x \in D_f); f(x) = 2 \frac{(x-1)'}{x-1} + 3 \frac{(x+2)'}{x+2} \quad (2)$$

ومنه : $F(x) = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + k$ مع $k \in \mathbb{R}$

وبما أن : $]-\infty; -2[$ يعني $x < -2$ اذن $x < 1$

ومنه : $x+2 < 0$ و $x-1 < 0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي:



V. دالة اللوغاريتم للأساس a ($a > 0$ و $a \neq 1$)

تعريف: ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا ومخالفا للعدد 1 دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز Log_a

و المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي: $\text{Log}_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

نتائج: $\text{Log}_a 1 = 0$, $\text{Log}_a e = \frac{1}{\ln a}$, $\text{Log}_a(a) = 1$

اذن $\forall x \in]0; +\infty[$; $\log_e(x) = \ln x$

خاصية:

لكل x و y من $]0; +\infty[$ و لكل a من $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ لدينا:

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y), \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\text{Log}_a(x^r) = r \text{Log}_a(x), \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

الدالتان \ln و Log_a لهما نفس الخاصيات الجبرية

البرهان: البرهان على الخاصية (1)

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$$

(يمكن البرهان على الخاصيات الأخرى باستعمال الخاصيات الجبرية للدالة \ln)

جدول تغيرات دالة اللوغاريتم للأساس a

الحالة 1: $a > 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a(x)$		+
$\log_a(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الحالة 2: $0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a(x)$		-
$\log_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$

أمثلة: أحسب وبسط ما يلي: $(1) \log_2 4 (2) \log_8 4 (3) \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$

$$A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{3}) \quad (4) \log_{\sqrt{3}} 9$$

$$\log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2 \quad \text{طريقة 1:}$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \times 1 = 2 \quad \text{طريقة 2:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1} \quad (2)$$

ومن f متصلة في الصفر على اليمين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1 \quad (3)$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ومبيانيا: $y = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x + \ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x + x - \ln x}{x(x - \ln x)} \quad (4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(x - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x - \ln x} = 0 = f'_d(0)$$

ومن f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x + \ln x}{x - \ln x} \right)' = \frac{(x + \ln x)'(x - \ln x) - (x + \ln x)(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x - \ln x) - (x + \ln x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} - x - \ln x + 1 + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$$

(6) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - \ln x$

$e > x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0$
ومن جدول الإشارة والتغيرات:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{e+1}{e-1}$	1

$$x + \ln x = x - \ln x \quad \text{يعني} \quad \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = 1 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 1 \quad (7)$$

يعني $2 \ln x = 0$ يعني $\ln x = 0$ يعني $x = 1$

اذن نقطة تقاطع C_f و المستقيم $y = 1$ هي $(\Delta): A(1; 1)$

(8) f دالة متصلة على المجال $D_f =]0; +\infty[$ ومنه متصلة على $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\text{و} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2} + \ln 2} = \frac{1 - 2 \ln 2}{1 + 2 \ln 2} < 0$$

$$f(1) = \frac{\frac{1}{2} + \ln(1)}{\frac{1}{2} - \ln(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 > 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فان المعادلة $f(x) = 0$ حلا على

الأقل على المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

أي: C_f يقطع محور الأفاسيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

(9)

نضع: $\log x = X$ والمعادلة تصبح: $2X^2 - 19X - 10 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 361 + 80 = 441 = (21)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = \frac{19-21}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ و } X_1 = \frac{19+21}{2 \times 2} = 10$$

يعني $\log x_2 = -\frac{1}{2}$ و $\log x_1 = 10$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{10}}{10}, 10^{10} \right\} \text{ يعني } x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ و } x_1 = 10^{10}$$

مثال 2: حل في \mathbb{R} المتراجحة التالية: $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1$

الجواب: المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$$D_f = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ يعني } x - \frac{1}{2} > 0 \text{ إذن: } x > \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ يعني } \log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \text{ يعني } \log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1$$

$$S =]-\infty; 1] \cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\text{ يعني } x \leq 1 \text{ ومنه: إذن: } S = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$$

تمارين للبحث

تمرين 1:

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x(\ln x + 1)^2 \text{ إذا كانت } x \neq 0 \text{ و } f(0) = 0$$

1. حدد D_f

2. أحسب: وأحسب و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} x(\ln x)^2$ ثم استنتج اتصال الدالة f على اليمين في 0

4. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

5. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول النتيجة ميانيا

6. تحقق أن $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x + 3)$ $\forall x > 0$

7. حدد جدول تغيرات الدالة f

8. حدد معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة الذي أفصولها 1

تمرين 2:

1. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 - x)}{x}$

2. أحسب مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x(\ln x)^4$

تمرين 3: أحسب

$$\log 50 - \log \frac{1}{2} (3 \log 2 + \log 5) (2 \log 10^4 + \log \frac{1}{10^4})$$

$$\log \sqrt{40} + \log \sqrt{90} - \log \frac{2}{3} (4)$$

تمرين 4: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية: $\log(x+3) + \log x = 1$

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = 2 (2 \log_4(x-1) + \log_4 2 = 1) (1)$$

$$(\log x)^2 + \log x - 6 = 0 (4 \log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0) (3)$$

حيث \log هو اللوغاريتم العشري

تمرين 5: حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ على المجال }]-\infty; 1[$$

$$\log_8 4 = \frac{\ln 4}{\ln 8} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2^3} = \frac{2 \ln 2}{3 \ln 2} = \frac{2}{3} : \log_8 4 (2)$$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = -2 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = -2 \times 1 = -2 (3)$$

يمكن استعمال طريقة أخرى

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 4 \times 1 = 4 (4)$$

$$A = \log_2 \left(\frac{1}{5} \right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{3}) = -\log_2 5 + \log_2(5 \times 2) + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right) (5)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 - \frac{1}{5} \log_3 \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

تمرين 9: أحسب ما يلي:

$$\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt[3]{2}) (2 \log_2 \left(\frac{1}{5} \right) + \log_2(10)) (1)$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{5} \right) + \log_2(10) = \log_2 \left(\frac{1}{5} \times 10 \right) = \log_2(2) = 1 (1) \text{ أجابة: } (1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt[3]{2}) = \log_{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}(2) = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{3} (2)$$

VI. دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة اللوغاريتمية للأساس 10

و نكتب \log عوض \log_{10} : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ لكل x من $]0; +\infty[$.

نتائج: $\log(10^r) = r$, $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, $(\forall r \in \mathbb{Q})$.

دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

الدالة \log_a قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و

$$\forall x \in]0; +\infty[; (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

مثال 1: $\log_{10} 100$, $\log_{10} 0,0001$

بسط ما يلي: $A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$

الجواب: $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$

$$\log_{10} 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4 \log_{10} 10 = -4$$

$$A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125) = \log(5^2 \times 10^4) + \frac{1}{2} \log(5^2 \times 10) - \log(5^3)$$

$$A = \log 5^2 + \log 10^4 + \frac{1}{2} (\log 5^2 + \log 10) - 3 \log 5 = 2 \log 5 + 4 \log 10 + \frac{1}{2} (2 \log 5 + 1) - 3 \log 5$$

$$A = 2 \log 5 + 4 + \log 5 + \frac{1}{2} - 3 \log 5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال 2: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0 (1)$$

$$2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0 \text{ حيث } \log \text{ هو اللوغاريتم العشري} (2)$$

أجابة: (1) المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان: $x > 0$

و $2x > 0$

يعني إذا كان: $x > 0$ و $x > 0$ إذن: $D_E =]0; +\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة: $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$

يعني $\log_5(x) - 1 = 0$ أو $\log_3(2x) = 0$ يعني $\log_5(x) = \log_5(5)$ أو

$$\log_3(2x) = \log_3(1)$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; 5 \right\} \text{ ومنه } x = \frac{1}{2} \text{ أو } x = 5 \text{ يعني } 2x = 1 \text{ أو } x = 5$$

$$2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0 (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان: $x > 0$ إذن: $D_E =]0; +\infty[$

تمارين محلولة أخرى :

تمرين 2: حل في \mathbb{R} المتراجحة : $\ln \frac{-3x+12}{2x+2} \leq 0$

الجواب : تحديد D مجموعة تعريف المتراجحة :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-3x+12}{2x+2} > 0 \right\}$$

$$x \in D \text{ نعتبر : } D =]-1; 4[$$

$$\ln \frac{-3x+12}{2x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{-3x+12}{2x+2} \leq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{-3x+12}{2x+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+12}{2x+2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5x+10}{2x+2} \leq 0$$

$$\text{إذن : }]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

$$\text{ومنه : } S =]-1; 4[\cap (]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[) =]2; 4[$$

تمرين 3: احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} \quad -3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} \quad -2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 \quad -1$$

أجوبة : -1 حساب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3$

مباشرة : $0 \times (-\infty)$ شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x}^3 (\ln \sqrt[3]{x}^3)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 3^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} \right)^3$$

حساب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x}$ نضع : $t = \sqrt[3]{x}$

إذا كان : $x \rightarrow 0^+$ فإن $t \rightarrow 0^+$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t$

وبما أن : $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 3^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} \right)^3$$

$$= 3^3 \times 0^3$$

-2 حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x}$ مباشرة : $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt[10]{x}^{10})^{10}}{\sqrt[10]{x}^{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10 \ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = 10^{10} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10}$$

حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}$ نضع : $t = \sqrt[10]{x}$

إذا كان : $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$ **ومنه :** $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t}$

وبما أن : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = 10^{10} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10}$$

$$= 10^{10} \times 0^{10}$$

-3 حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$ مباشرة : $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$$

حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$ نضع : $t = 3x+1$

إذا كان : $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t}$

وبما أن : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} = 0$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \frac{3}{2} \times 0 = 0$

تمرين 4: تحدد $f'(x)$ بحيث : $f(x) = \frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1}$

الجواب : $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1} \right)'$$

$$= \frac{(3x^2+1) \ln'(3x^2+1) - (\ln(3x^2+1))' (3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x}{3x^2+1} (3x^2+1) - 6x \ln(3x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x - 6x \ln(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x(1 - \ln(3x^2+1))}{(3x^2+1)^2} \quad \text{إذن :}$$