

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :

$$g(x) = x - 2 \ln x$$

1) أ. أحسب  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$

ب. بين أن  $g$  تناقصية على  $]0, 2[$  وتزايدية على  $]2, +\infty[$

2) استنتج أن  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :

$$f(x) = x - (\ln x)^2$$

1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم أول هندسيا النتيجة

$$2) \text{ أ. بين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

ب. استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  وأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ج. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $C_f$  عند  $+\infty$

د. بين أن المنحنى  $C_f$  يوجد تحت المستقيم  $y = x$  ( $\Delta$ )

3) أ. بين أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  واستنتج تغيرات الدالة  $f$

ب. أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$

ج. أعط معادلة المماس للمنحنى  $C_f$  في النقطة ذات الأضلاع 1

4) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال

$$]0, +\infty[ \text{ وأن } \frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2} \text{ ( نأخذ } (\ln 2)^2 < \frac{1}{2} \text{ )}$$

5) أرسم المنحنى  $C_f$  والمستقيم ( $\Delta$ ) (نقبل أن  $C_f$  يقبل في

النقطة  $I(e, e-1)$  نقطة انعطاف ونأخذ  $e = 2,7$ )

(III) المعرفة كما يلي :

$$U_0 = 2 \text{ و } U_{n+1} = f(U_n) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

1) بين بالترجع أن  $1 \leq U_n \leq 2$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

2) بين أن المتتالية  $(U_n)_n$  تناقصية

3) استنتج أن  $(U_n)_n$  متقاربة وحدد نهايتها

الجزء الأول : نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :

$$g(x) = \ln(x+1) - x$$

1) أ. أحسب  $g'(x)$  ثم بين أن  $g$  تناقصية على  $]0, +\infty[$

ب. استنتج أن  $g(x) \leq 0$  :  $\forall x \in ]0, +\infty[$

2) بين أن  $0 < \ln(x+1) < x$  :  $\forall x \in ]0, +\infty[$

الجزء الثاني : لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1) حدد مجموعة التعريف وبين أن  $f$  دالة فردية

2) أ. أحسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $C_f$  عند  $+\infty$

3) أحسب المشتقة  $f'(x)$  ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

$$4) \text{ أ. أدرس إشارة } \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\text{ ( لاحظ أن } \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \text{ )}$$

ب. استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $C_f$  والمستقيم  $y = x$  ( $\Delta$ )

5) أرسم المنحنى  $C_f$  و ( $\Delta$ ) ( نأخذ  $f(\sqrt{3}) = 3$  )

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n>1}$  المعرفة كما يلي :  $U_n = f(n) - n$

$$1) \text{ أ. تحقق أن } U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

ب. بين أن  $(U_n)_{n>1}$  تناقصية

$$2) \text{ أ. بين أن } 0 < U_n \leq \frac{2}{n-1} \text{ } \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

ب. أحسب نهاية المتتالية  $(U_n)_{n>1}$

مسألة

(I) 1) نضع  $v(x) = \ln(x+1) - x$  لكل  $x \in [0, +\infty[$

أ. أحسب  $v'(x)$  وضع جدول تغيرات  $v$

ب. استنتج أن  $\ln(1+x) < x$  ( $\forall x > 0$ )

2) نضع  $h(x) = -\frac{3}{2}x - \ln(1-x)$  لكل  $x \in ]-\infty, 0[$

أ. بين أن  $h'(x) = \frac{3x-1}{2(1-x)}$  وأنجز جدول تغيرات  $h$

ب. بين أن  $h(x) \geq 0$  لكل  $x \in ]-\infty, 0[$

(II) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]-\infty, 1[$  بما يلي :

$$f(x) = -\frac{x}{2} - \ln(1-x)$$

1) أ. أحسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_f)$  عند  $-\infty$

$$2) \text{ أ. بين أن } f'(x) = \frac{x+1}{2(1-x)}$$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

3) أ. بين أن  $(C_f)$  يوجد فوق  $y = x$  ( $\Delta$ ) على  $]-\infty, 0[$

ب. أرسم المنحنى  $(C_f)$

(III) نعتبر المتتالية  $(U_n)_n$  المتتالية العددية المعرفة كما

يلي :  $U_0 = -1$  و  $U_{n+1} = f(U_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

أ. بين بالترجع أن  $-1 \leq U_n \leq 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

ب. بين أن المتتالية  $(U_n)_n$  تزايدية

ج. بين أن  $U_{n+1} \geq \frac{1}{2}U_n$  استنتج أن  $U_n \geq -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د. بين أن  $(U_n)_n$  متقاربة وحدد نهايتها