مسألة رقم (1)

I] نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$$

1) أحسب $g'(x)$ ثم بين أن g تزايدية على $]0,+\infty[$

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج : $x\geq 1 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$

II] لتكن f دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ج- بين أن المستقيم $(\Delta): y=-x+1$ مقارب مائل ل (C_f)

د- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) والمقارب المائل

2) أ- بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^{+*} : f'(x)=-\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

3) أسم المنحنى (C_f)

III] نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$$V_{n+1}=1+\frac{\ln V_n}{\sqrt{V_n}} \quad ; \quad V_0=\frac{3}{2}$$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}) : V_n\geq 1$

2) تحقق أن $V_{n+1}=V_n+f(V_n)$ ثم أدرس رتابة المتتالية $(V_n)_n$

3) استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

IV] لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\varphi(x)=xe^{-\frac{x}{2}}-e^x+1$$

1) بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}) \ \ \varphi(x)=f(e^x)$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة φ

تمرين 2009

الجزء 1 :

نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=2\ln x+x-1$

1) أحسب المشتقة $g'(x)$

2) بين أن g تزايدية على $]0,+\infty[$ و ضع جدول تغيرات g

(حساب النهايات غير مطلوب)

3) أحسب $g(1)$ ثم استنتج أن $(\forall x>1) \ \ g(x)>0$

و أن $\forall x\in\ ]0,1[\ \ g(x)<0$

الجزء 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=(\ln x)^2-\ln x+x$$

1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أ- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (Δ) $y=x$

ب- أسم المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) $y=x$

الجزء 3 : لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$U_0=2$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N}) \ \ 1\leq U_n\leq e$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

مسألة (2)

الجزء (1) : نعتبر الدالة $g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x)=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2) أحسب $g'(x)$ و بين أن g تزايدية على $]-1,+\infty[$

3) أحسب $g(0)$ و استنتج أن $(\forall x>0) \ \ g(x)>0$

و أن $\forall x\in\ ]-1,0[\ \ g(x)<0$

الجزء (2) : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$

بما يلي : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم (Δ) $y=x$ مقارب مائل ل (C_f) عند $+\infty$

2) بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

4) أسم المنحنى (C_f)

5) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N}) \ \ U_n\geq 0$

ب- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها