

الأستاذ:  
نجيب  
عثماني

تمارين محلولة: الدوال اللوغاريتمية  
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة  
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية  
الجهة  
الشرقية

$$S = \left\{ \frac{9}{2} \right\} \text{ يعني } -2x = -9 \text{ يعني } x = \frac{9}{2} \in D_E \text{ ومنه } S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}$$

$$\ln(2x-6) \geq 0 \quad (3)$$

**المرحلة 1:** هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:  $2x-6 > 0$

يعني إذا كان:  $x > 3$  إذن:  $D_E = ]3; +\infty[$

**المرحلة 2:** حل المتراجحة:

$$\ln(2x-6) \geq \ln 1 \text{ يعني } \ln(2x-6) \geq 0$$

$$\text{يعني } 2x-6 \geq 1 \text{ يعني } x \geq \frac{7}{2} \text{ يعني } x \in \left[ \frac{7}{2}; +\infty[$$

$$\text{ومنه } S = \left[ \frac{7}{2}; +\infty[ \text{ يعني } S = \left[ \frac{7}{2}; +\infty[ \cap ]3; +\infty[$$

**تمرين 3:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية:

$$\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \quad (2) \quad \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \quad (1)$$

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \quad (1) \text{ **أجوبة:** } \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$$

**المرحلة 1:** هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:  $2x-1 > 0$

$$1-x > 0$$

$$\text{يعني إذا كان: } x > \frac{1}{2} \text{ و } x < 1 \text{ إذن: } D_E = \left] \frac{1}{2}; 1[$$

**المرحلة 2:** حل المعادلة:

$$\ln(2x-1) = \ln(1-x) \text{ يعني } \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\} \text{ يعني } 2x-1=1-x \text{ يعني } 3x=2 \text{ يعني } x = \frac{2}{3} \in D_E \text{ ومنه } S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

$$\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \quad (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:  $2x > 0$  و  $x^2 + 1 > 0$  يعني

$$D_E = ]0; +\infty[ \text{ إذن: } x > 0$$

ليكن  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1$

$$x=1 \in D_E \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0. \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة. (E) هي:  $S = \{1\}$

**تمرين 4:** حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة:  $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

**الجواب:** **المرحلة 1:** هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$x-1 > 0 \text{ و } 3x+1 > 0 \text{ أي } \left( x > -\frac{1}{3}; x > 1 \right) \text{ يعني } x > 1$$

**المرحلة 2:** حل المتراجحة: ليكن  $x$  من  $]1; +\infty[$

$$\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) < \ln(3x+1)$$

$$x > -1 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x-1 < 3x+1$$

$$\text{إذن: } S = ]1; +\infty[ \cap ]-\frac{1}{3}; +\infty[ \text{ أي } S = ]1; +\infty[$$

**تمرين 1:** حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

$$h: x \rightarrow \frac{x}{\ln x} \quad (3) \quad g: x \rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2) \quad (2) \quad f: x \rightarrow \ln(x+1) \quad (1)$$

**أجوبة:** (1)  $f(x) = \ln(x+1)$  يعني  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\}$

$$D_f = ]-1; +\infty[ \text{ ومنه } x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$(2) \quad g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

$$\text{يعني } D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 0\}$$

$$x^2 - 3x + 2 \text{ نبحث عن الجذور}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فإن لثلاثية الحدود جذرين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

نحدد جدول الاشارة:

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\text{ومنه } D_g = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$$

$$(3) \quad h(x) = \frac{x}{\ln x} \text{ يعني } D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\}$$

$$\ln x = 0 \text{ يعني } \ln x = \ln 1 \text{ يعني } x = 1 \text{ ومنه } D_h = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

**تمرين 2:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات و المتراجحات التالية:

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \quad (2) \quad \ln(x-2) = 0 \quad (1)$$

$$\ln(x-1) \geq 0 \quad (3)$$

$$\ln(x-1) = 0 \quad (1) \text{ **أجوبة:** } \ln(x-1) = 0$$

**المرحلة 1:** هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:  $x-2 > 0$

$$\text{يعني إذا كان: } x > 2 \text{ إذن: } D_E = ]2; +\infty[$$

**المرحلة 2:** حل المعادلة:

$$\ln(x-2) = \ln(1) \text{ يعني } \ln(x-2) = 0$$

$$\text{يعني } x-2=1 \text{ يعني } x=3 \in D_E \text{ ومنه } S = \{3\}$$

$$(2) \quad \ln(3x-1) = \ln(5x-10)$$

**المرحلة 1:** هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:  $5x-10 > 0$

$$3x-1 > 0$$

$$\text{يعني إذا كان: } x > 2 \text{ و } x > \frac{1}{3} \text{ إذن: } D_E = ]2; +\infty[$$

**المرحلة 2:** حل المعادلة:

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \text{ يعني } 3x-1 = 5x-10$$

**تمرين 7:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة و المتراحة التالية:

$$\ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \quad \ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3 \quad (1)$$

**الأجوبة (1):** يعني  $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \quad \text{يعني} \quad \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$$

**المرحلة 1:** هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان:  $x > 0$  و  $x-1 > 0$

يعني إذا كان:  $x > 0$  و  $x > 1$  إذن:  $D_E = ]1; +\infty[$

**المرحلة 2:** حل المعادلة:

$$\ln(x(x-1)) = \ln 6 \quad \text{يعني} \quad \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$$

$$\text{يعني} \quad x(x-1) = 6 \quad \text{يعني} \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$S = \{3\} \quad \text{فان} \quad x_2 = -2 \notin ]1; +\infty[ \quad \text{وبما أن} \quad x_2 = -2 \quad \text{و} \quad x_1 = 3$$

$$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \quad (2)$$

**المرحلة 1:** هذه المتراحة معرفة إذا فقط إذا كان:

$$x > \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad x+1 > 0 \quad \text{أي} \quad 2x-5 > 0 \quad \text{و} \quad x > -1$$

$$\text{ومنه:} \quad D_I = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$$

**المرحلة 2:** حل المتراحة: ليكن  $x$  من  $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$

$$\ln((2x-5)(x+1)) \leq \ln 4 \Leftrightarrow \ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$$

$$2x^2 - 3x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (2x-5)(x+1) \leq 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = -\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = 3 \quad \text{يعني} \quad x_2 = \frac{3-9}{2 \times 2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{3+9}{2 \times 2}$$

$x$	$-\infty$	$-3/2$	$3$	$+\infty$
$2x^2-3x-9$	$+$	$0$	$-$	$+$

$$S = \left[ -\frac{3}{2}; 3 \right] \cap \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[ = \left] \frac{5}{2}; 3 \right[$$

**تمرين 8:** بين أن:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

$$B = -\ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27} = \frac{1}{4} \ln 3^4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{1}{3^3} = \frac{4}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + 3 \ln 3$$

**الأجواب:** نضع:  $X = \frac{1}{x}$

$$X \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = -\infty$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

**تمرين 9:** أحسب النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1$  (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \ln x \quad (5)$$

**الأجوبة (1):**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{شكل غير محدد لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

**تمرين 5:** إذا علمت أن  $\ln(2) = 0,7$  و  $\ln(3) = 1,1$

فاحسب ما يلي:  $\ln(72)$ ,  $\ln(8)$ ,  $\ln(4)$ ,  $\ln(6)$

$$\ln(3\sqrt{2}), \ln(\sqrt{6}), \ln(\sqrt{2}), \ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A = \ln \sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad \ln(12\sqrt[3]{3})$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27}$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2015}$$

**أجوبة:**

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) = 0,7 + 1,1 = 1,8$$

$$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2^2) = 2 \ln(2) = 2 \times 0,7 = 1,4$$

$$\ln(8) = \ln(2 \times 2 \times 2) = \ln(2^3) = 3 \ln(2) = 3 \times 0,7 = 2,1$$

$$\ln(72) = \ln(3^2 \times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$$

$$\ln(72) = 2 \times 1,1 + 3 \times 0,7 = 2,2 + 2,1 = 4,3$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) = 1,1 - 0,7 = 0,4 \quad \text{و}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = -0,7$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} \times 1,8 = 0,9$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) = 1,1 + \frac{1}{2} \ln(2) = 1,1 + \frac{0,7}{2} = 1,1 + 0,35 = 1,45$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln(3 \times 2^2) + \ln(\sqrt[3]{3}) = \ln(3) + 2 \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{3^3}\right) = \ln(3) + 2 \ln(2) + \frac{1}{3} \ln(3)$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = 1,1 + 1,4 + \frac{1}{3} \times 1,1 = 2,86$$

$$A = \ln \sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2-\sqrt{2}} = \ln \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} \sqrt{2-\sqrt{2}} \right) = \ln \left( \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \right)$$

$$A = \ln \left( \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} \right) = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 = 0,35$$

$$B = -\ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27} = \frac{1}{4} \ln 3^4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{1}{3^3} = \frac{4}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + 3 \ln 3$$

$$B = 1,1 + \frac{1}{2} \times 1,1 + 3 \times 1,1 = 4,95$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2015} = \ln \left( (\sqrt{2}+1)^{2015} \times (\sqrt{2}-1)^{2015} \right)$$

$$C = \ln \left( (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) \right)^{2015} = \ln \left( (\sqrt{2})^2 - 1^2 \right)^{2015} = 2015 \ln(1) = 2015 \times 0 = 0$$

**تمرين 6:** بسط

$$B = \ln(0,01) - \ln(1000) + \ln(10^6) \quad (2) \quad A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) \quad (1)$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) = \ln(3) - \ln(5) + \ln(3 \times 5) \quad (\text{الجواب: } 1)$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln 3 + \ln 5 = 2 \ln(3) = \ln(3^2) = \ln(9)$$

$$B = \ln(10^{-2}) - \ln(10^3) + \ln(10^6) = -2 \ln(10) - 3 \ln(10) + 6 \ln(10)$$

$$B = \ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$$

$$X_2 = -2 \text{ و } X_1 = \frac{3}{2} \text{ يعني } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times 2} \text{ و } X_1 = \frac{-1 + 7}{2 \times 4}$$

$$x_2 = e^{-2} \text{ و } x_1 = e^{\frac{3}{2}} \text{ يعني } \ln x_2 = -2 \text{ و } \ln x_1 = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ e\sqrt{e}, \frac{1}{e^2} \right\} : \text{ ومنه } x_2 = \frac{1}{e^2} \text{ و } x_1 = (\sqrt{e})^3 = e\sqrt{e} \text{ يعني}$$

$$\begin{cases} 3 \ln x + \ln y = 2 \\ 2 \ln x - \ln y = 3 \end{cases} \text{ تمرين 13: حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظام}$$

$$\begin{cases} 3 \ln x + \ln y = 2 \rightarrow 1 \\ 2 \ln x - \ln y = 3 \rightarrow 2 \end{cases} \text{ الجواب:}$$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$$x = e \text{ يعني } \ln x = \ln e \text{ يعني } \ln x = 1 \text{ يعني } 5 \ln x = 5$$

$$3 \ln e + \ln y = 2 : \text{ نعوض } x = e \text{ في المعادلة الأولى فنجد :}$$

$$y = \frac{1}{e} \text{ يعني } y = e^{-1} \text{ يعني } \ln y = -1 \text{ يعني } \ln y = 2 - 3$$

$$S = \left\{ \left( e; \frac{1}{e} \right) \right\} : \text{ ومنه}$$

**تمرين 14:** أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) \quad (1)$$

$$X = \sqrt{x} : \text{ ضع } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (1) \text{ **الأجوبة:** (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 : \text{ حسب الخاصية } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x = 0 \quad (3)$$

$$X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty \quad X = \frac{1}{x} : \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X) = \lim_{0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty : \text{ لأن}$$

$$X = \sqrt{x} : \text{ نضع } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 \quad (5)$$

$$X^2 = x \Leftrightarrow X = \sqrt{x} \Leftrightarrow X^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow X = \sqrt{x}$$

$$X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = \lim_{0^+} X^2 (\ln(X^2))^2 = \lim_{0^+} X^2 (2 \ln X)^2 = \lim_{0^+} 4X^2 (\ln X)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = 4 \lim_{0^+} (X \ln X)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

**تمرين 15:** أحسب  $f'(x)$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \text{ و } f(x) = x \ln x \text{ و } f(x) = x^2 - \ln x$$

$$f'(x) = (x^2 - \ln x)' = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} \text{ **الأجوبة:** (1)}$$

$$f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = 1 \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = (\ln(1 + x^2))' = \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left( 2 + \frac{1}{\ln x} \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (\ln(x) - 1) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x (\ln(x) + 1) = +\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + 1 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty : \text{ لأن}$$

$$\ln(e^3) \text{ و } \ln(e^7) \quad (1) \text{ **تمرين 10:** أحسب:}$$

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة التالية: المعادلة } \ln(x) = 7$$

$$\ln(e^3) = 3 \text{ و } 7 = \ln(e^7) \quad (1) \text{ **الأجوبة:** (1)}$$

$$x > 0 \quad (2)$$

$$x = e^7 \text{ يعني } \ln(x) = 7 \ln(e) \text{ يعني } \ln(x) = 7$$

$$S = \{e^7\}$$

**تمرين 11:** أحسب وبسط :

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9) \quad A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \ln(e) + 4 \ln(e) - \ln(e) = 5 \ln(e) = 5 \quad (1) \text{ **الجواب:** (1)}$$

$$A = 2 \times 1 + 4 \times 1 - 1 = 5$$

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9) = 2 \times \frac{1}{2} \ln(e) + \ln(e) + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \times 9 \ln(e)$$

$$B = 1 \ln(e) + \ln(e) + \frac{1}{2} \ln(e) - 3 \ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

**تمرين 12:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية:

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad (2) \quad \ln(2x - 1) = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\ln(2x - 1) = \frac{3}{2} \quad (1) \text{ **الجواب:** (1)}$$

**المرحلة 1:** هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان:  $2x - 1 > 0$

$$D_E = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ : \text{ يعني } x > \frac{1}{2}$$

**المرحلة 2:** حل المعادلة:

$$\ln(2x - 1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \text{ يعني } \ln(2x - 1) = \frac{3}{2} \ln(e) \text{ يعني } \ln(2x - 1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{يعني } 2x - 1 = e^{\frac{3}{2}} \text{ يعني } 2x - 1 = (\sqrt{e})^3$$

$$x = \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$S = \left\{ \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \right\}$$

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان:  $x > 0$

**نضع:**  $\ln x = X$  والمعادلة تصبح:  $2X^2 + X - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

**تمرين 16:** حدد الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  في كل حالة

من الحالتين التاليتين:

$$I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} \quad 1.$$

$$I = ]0; 1[; f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad 2.$$

**الأجوبة (1):** لدينا  $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} = \frac{1}{4} \frac{(x^4 + 2)'}{x^4 + 2}$

اذن:  $k \in \mathbb{R}$ : حيث  $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4 + 2| + k$

يعني:  $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + k$  لأن:  $x^4 + 2 > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x} \quad (2)$$

اذن:  $k \in \mathbb{R}$ : حيث  $F(x) = \ln|\ln x| + k$

**تمرين 17:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب:  $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1. حدد  $D$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  و حدد عددين حقيقيين

$a$  و  $b$  بحيث:  $(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

2. استنتج الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; -2[$

3. حدد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $]-\infty; -2[$  بحيث  $F(-3) = \ln 2$

**أجوبة:** يعني  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \neq 0\}$

نبحث عن الجذور  $x^2 + x - 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$

بما أن  $\Delta > 0$  فان ثلاثية الحدود جذرين هما:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2 \times 1} = 1$  و  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2 \times 1} = -2$

$D_f = \mathbb{R} / \{-2; 1\}$

$f(x) = \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a - b}{(x-1)(x+2)}$

بالمقارنة مع الكتابة:  $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$  نجد أن:

و بجمع المعادلتين طرف طرف نجد:  $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases}$

$a = 2$

و بتعويض  $a$  بقيمتها في المعادلة الأولى نجد أن:  $2 + b = 5$  يعني  $b = 3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة  $f$  هي:

$(\forall x \in D_f); f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$

$(\forall x \in D_f); f(x) = 2 \frac{(x-1)'}{x-1} + 3 \frac{(x+2)'}{x+2} \quad (2)$

ومنه:  $k \in \mathbb{R}$  مع  $F(x) = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + k$

وبما أن:  $x \in ]-\infty; -2[$  يعني  $x < -2$  اذن:  $x < 1$

ومنه:  $x+2 < 0$  و  $x-1 < 0$  وبالتالي: مجموعة الدوال الأصلية هي:

$k \in \mathbb{R}$  مع  $F(x) = 2 \ln(1-x) + 3 \ln(-x-2) + k$

$F(-3) = \ln 2$  يعني  $F(-3) = \ln 2$  يعني  $2 \ln(4) + 3 \ln(1) + k = \ln 2$

يعني  $k = -3 \ln 2$  ومنه:  $F(x) = 2 \ln(1-x) + 3 \ln(-x-2) - 3 \ln 2$

**تمرين 18:** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

بما يلي:  $f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$

1. حدد الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  بحيث:

$\forall x \in ]1; +\infty[; f(x) = a + \frac{b}{x-1}$

2. استنتج الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$

حدد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  بحيث  $F(2) = 0$

**أجوبة (1):**  $a + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$

بالمقارنة مع الكتابة:  $f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$

نجد أن:  $\begin{cases} a=2 \\ -a+b=-5 \end{cases}$  نجد اذن:  $a = 2$  يعني  $b = -3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة  $f$

هي:  $(\forall x \in ]1; +\infty[); f(x) = 2 - \frac{3}{x-1}$

$(\forall x \in ]2; +\infty[); f(x) = 2 - 3 \frac{(x-1)'}{x-1} \quad (2)$

ومنه:  $k \in \mathbb{R}$  مع  $F(x) = 2x - 3 \ln|x-1| + k$

وبما أن:  $x \in ]1; +\infty[$  يعني  $x > 1$

ومنه:  $x-1 > 0$  وبالتالي: مجموعة الدوال الأصلية هي:

$k \in \mathbb{R}$  مع  $F(x) = 2x - 3 \ln(x-1) + k$

$F(2) = 0$  يعني  $4 - 3 \ln(1) + k = 0$  يعني  $k = -4$

ومنه:  $F(x) = 2x - 3 \ln(x-1) - 4$

**تمرين 19:**

I. لتكن الدالة العددية  $g$  بحيث:  $g(x) = x - \ln x$

1. حدد  $D_g$  و أحسب نهايات  $g$  عند محداث  $D_g$

2. أحسب  $g'(x)$  و أعط جدول تغيرات  $g$

3. استنتج أن:  $x > \ln x$ ,  $\forall x > 0$

II. لتكن الدالة العددية  $f$  بحيث:  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$ ,  $x > 0$

$f(0) = -1$

1. بين أن  $D_f = ]0; +\infty[$

2. بين أن  $f$  متصلة في الصفر على اليمين

3. أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4. بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

5. بين أن:  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$

6. أعط جدول تغيرات  $f$

7. حدد نقط تقاطع  $C_f$  و المستقيم  $y = 1$  ( $\Delta$ )

8. بين أن  $C_f$  يقطع محور الأفاصيل في نقطة

أفصولها ينتمي إلى  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9. أنشئ  $C_f$  في معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (خذ  $e \approx 2,7$ ,  $\ln 2 \approx 0,7$ )

I. **أجوبة (1):**  $D_g = ]0; +\infty[$   $g(x) = x - \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty$$

$$g'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \quad (2)$$

إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $x-1$  : لأن  $x \in ]0; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة  $g$

$$x + \ln x = x - \ln x \text{ يعني } \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = 1 \text{ يعني } f(x) = 1 \quad (7)$$

يعني  $2\ln x = 0$  يعني  $\ln x = 0$  يعني  $x = 1$

أذن نقطة تقاطع  $C_f$  و المستقيم  $y = 1$  ( $\Delta$ ): هي  $A(1; 1)$

(8)  $f$  دالة متصلة على المجال  $D_f = ]0; +\infty[$  ومنه متصلة على  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2} + \ln 2} = \frac{1 - 2\ln 2}{1 + 2\ln 2} < 0$$

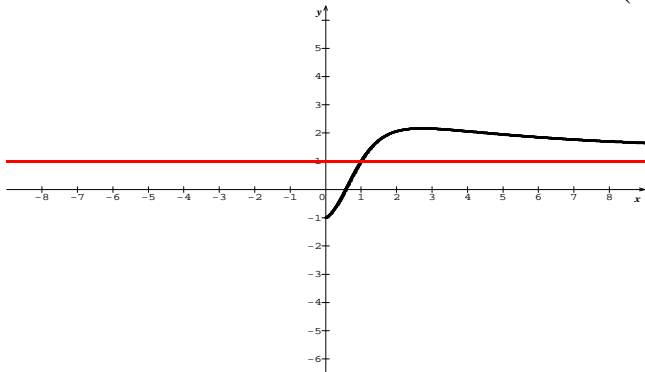
$$f(1) = \frac{\frac{1}{2} + \ln(1)}{\frac{1}{2} - \ln(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 > 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$

حلا على الأقل على المجال  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

أي:  $C_f$  يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى

$$\left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad (9)$$



**تمرين 20: أحسب وبسط ما يلي : (1)  $\log_8 4$  (2)  $\log_2 4$**

$$\log_{\sqrt{3}} 9 \quad (4) \quad \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$A = \log_2 \left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3}) \quad (5)$$

$$\log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2 : \text{طريقة 1}$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2 \times 1 = 2 : \text{طريقة 2}$$

$$\log_8 4 = \frac{\ln 4}{\ln 8} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2^3} = \frac{2\ln 2}{3\ln 2} = \frac{2}{3} : \log_8 4 \quad (2)$$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = -2\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = -2 \times 1 = -2 \quad (3)$$

يمكن استعمال طريقة أخرى

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 4 \times 1 = 4 \quad (4)$$

$$A = \log_2 \left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3}) = -\log_2 5 + \log_2(5 \times 2) + \log_{\frac{1}{3}} \left(3^{\frac{1}{5}}\right) \quad (5)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

(3) نلاحظ أن  $g$  تقبل قيمة دنيا عند  $x_0 = 1$

أذن:  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad g(1) \leq g(x)$  : إذن  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad 1 \leq x - \ln x$

أذن:  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \ln x < x$  : إذن  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad 0 < 1 \leq x - \ln x$

$$x > 0 \text{ و } x - \ln x \neq 0 \text{ يعني } f \text{ دالة معرفة يعني } \begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} & (1) \\ f(0) = -1 \end{cases} \quad (II)$$

وحسب ماسبق وجدنا أن  $0 < x - \ln x$  : إذن  $x - \ln x \neq 0$

ولدينا 0 لديه صورة إذن:  $D_f = ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} + 1\right)}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0) : \text{لأن } \frac{0}{\infty} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0^-$$

ومنه  $f$  متصلة في الصفر على اليمين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1 \quad (3)$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  ومبيانيا:  $y = 1$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x + \ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x + x - \ln x}{x(x - \ln x)} \quad (4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(x - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x - \ln x} = 0 = f'_d(0)$$

ومنه  $f$  قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x + \ln x}{x - \ln x}\right)' = \frac{(x + \ln x)'(x - \ln x) - (x + \ln x)(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x - \ln x) - (x + \ln x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} - x - \ln x + 1 + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2}$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$$

(6) إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $1 - \ln x$

$e > x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0$   
ومنه جدول الإشارة والتغيرات :

**تمرين 21:** أحسب ما يلي:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{2}) + \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10)$$

**أجوبة:** (1)  $\log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) = \log_2\left(\frac{1}{5} \times 10\right) = \log_2(2) = 1$

(2)  $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{2}) = \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}(2) = -\frac{1}{3} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{3}$

**تمرين 22:** أحسب و بسط ما يلي:

$$\log_{10} 0,0001, \log_{10} 100$$

$$A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$$

**أجوبة:**  $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$

$$\log_{10} 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4 \log_{10} 10 = -4$$

$$A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$$

$$A = \log(5^2 \times 10^4) + \frac{1}{2} \log(5^2 \times 10) - \log(5^3)$$

$$A = \log 5^2 + \log 10^4 + \frac{1}{2}(\log 5^2 + \log 10) - 3 \log 5$$

$$A = 2 \log 5 + 4 \log 10 + \frac{1}{2}(2 \log 5 + 1) - 3 \log 5$$

$$A = 2 \log 5 + 4 + \log 5 + \frac{1}{2} - 3 \log 5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

**تمرين 23:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية:

$$\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$$

$$2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0$$

**أجوبة:** (1) المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$2x > 0 \text{ و } x > 0$$

$$D_E = ]0; +\infty[ \text{ إذن } x > 0$$

$$\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$$

$$\log_3(2x) = 0 \text{ أو } \log_5(x) - 1 = 0 \text{ يعني } \log_3(2x) = \log_3(5) \text{ أو } \log_5(x) = 1$$

$$\log_3(2x) = \log_3(1)$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; 5 \right\} \text{ : منه } x = \frac{1}{2} \text{ أو } x = 5 \text{ يعني } 2x = 1 \text{ أو } x = 5$$

$$2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0$$

$$D_E = ]0; +\infty[ \text{ إذن } x > 0$$

$$2X^2 - 19X - 10 = 0 \text{ والمعادلة تصبح } \log x = X$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 361 + 80 = 441 = (21)^2 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = \frac{19 - 21}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ و } X_1 = \frac{19 + 21}{2 \times 2} = 10$$

$$\log x_2 = -\frac{1}{2} \text{ و } \log x_1 = 10$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{10}}{10}, 10^{10} \right\} \text{ : منه } x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ و } x_1 = 10^{10}$$

**تمرين 24:** حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة التالية:  $\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1$

**الجواب:** المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$$D_I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \text{ : يعني } x - \frac{1}{2} > 0$$

$$x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ يعني } \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ يعني } \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1$$

$$S = ]-\infty; 1] \cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$$

**تمرين 125:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة التالية:

$$\ln^2(x - 1) - \ln(x - 1) - 2 = 0$$

(2) حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة التالية:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) - \log_{\frac{1}{3}}(-x + 2) \leq 0$$

$$\ln^2(x - 1) - \ln(x - 1) - 2 = 0 \text{ (أجوبة: 1)}$$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:  $x - 1 > 0$  يعني  $x > 1$

$$\text{نضع: } X = \ln(x - 1) \text{ والمعادلة تصبح: } X^2 - X - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = -1 \text{ و } X_1 = 2 \text{ يعني } X_2 = \frac{1-3}{2 \times 1} \text{ و } X_1 = \frac{1+3}{2 \times 1}$$

$$\text{يعني } \ln(x_1 - 1) = 2 \text{ و } \ln(x_2 - 1) = -1 \text{ يعني } x_1 - 1 = e^2 \text{ و } x_2 - 1 = e^{-1}$$

$$\text{يعني } x_1 = e^2 + 1 \text{ و } x_2 = \frac{1}{e} + 1 \text{ ومنه: } S = \left\{ e^2 + 1, \frac{1}{e} + 1 \right\}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) - \log_{\frac{1}{3}}(-x + 2) \leq 0$$

المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$$x + 1 > 0 \text{ و } -x + 2 > 0 \text{ يعني } x > -1 \text{ و } x < 2$$

$$\text{إذن: } D_I = ]-1; 2[$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) - \log_{\frac{1}{3}}(-x + 2) \leq 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(-x + 2) \text{ يعني } x + 1 \geq -x + 2$$

$$\text{يعني } x \geq \frac{1}{2} \text{ ومنه: إذن: } S = ]-1; 2[ \cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ = \left] \frac{1}{2}; 2 \right[$$

$$\text{تمرين 26: حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة: } \ln \frac{-3x + 12}{2x + 2} \leq 0$$

**الجواب:** تحديد  $D$  مجموعة تعريف المتراجحة:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-3x + 12}{2x + 2} > 0 \right\}$$

$$x \in D \text{ نعتبر: } D = ]-1; 4[$$

$$\ln \frac{-3x + 12}{2x + 2} \leq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{-3x + 12}{2x + 2} \leq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{-3x + 12}{2x + 2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x + 12}{2x + 2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5x + 10}{2x + 2} \leq 0$$

$$\text{إذن: } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$$

$$\text{ومنه: } S = ]-1; 4[ \cap (]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[) = [2; 4[$$

**تمرين 27:** احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x + 1)}{2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 \text{ : أجوبة: 1- حساب}$$

مباشرة:  $0 \times (-\infty)$  شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^3} (\ln \sqrt[3]{x^3})^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3\sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3$$

$$f'(x) = \frac{\frac{6x}{3x^2+1}(3x^2+1) - 6x \ln(3x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x - 6x \ln(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x(1 - \ln(3x^2+1))}{(3x^2+1)^2} \quad \text{إذن:}$$

## تمارين للبحث والتثبيت

### تمرين 1:

I نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(0) = 0 \text{ و } x \neq 0 \text{ إذا كانت } f(x) = x(\ln x + 1)^2$$

1. حدد  $D_f$

2. أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و أحسب و

3. أحسب  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x(\ln x)^2$  ثم استنتج اتصال الدالة  $f$  على اليمين في 0

4. أدرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في 0 ثم أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها

5. أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  وأول النتيجة مبيانياً

6. تحقق أن  $\forall x > 0$   $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x + 3)$

7. حدد جدول تغيرات الدالة  $f$

8. حدد معادلة مماس منحنى الدالة  $f$  عند النقطة الذي أفصولها 1

### تمرين 2:

1. أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 - x)}{x}$

2. أحسب مشتقة الدالة  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = x(\ln x)^4$

### تمرين 3:

$$\log 50 - \log \frac{1}{2} (3 \log 2 + \log 5 (2 \log 10^4 + \log \frac{1}{10^4}))$$

$$\log \sqrt{40} + \log \sqrt{90} - \log \frac{2}{3} (4$$

**تمرين 4:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية:  $\log(x+3) + \log x = 1$

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = 2 (2 \log_4(x-1) + \log_4 2) = 1$$

$$(\log x)^2 + \log x - 6 = 0 \quad (4 \log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0)$$

حيث  $\log$  هو اللوغاريتم العشري

**تمرين 5:** حدد الدوال الأصلية للدالة  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{على المجال } ]-\infty; 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 3^3 \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} \right)^3$$

حساب:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x}$  : نضع  $t = \sqrt[3]{x}$

إذا كان:  $x \rightarrow 0^+$  فإن:  $t \rightarrow 0^+$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t$

و بما أن:  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 0 \quad \text{إذن:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 3^3 \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} \right)^3 = 3^3 \times 0^3$$

2- حساب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x}$  مباشرة:  $\frac{+\infty}{+\infty}$  شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt[10]{x})^{10}}{\sqrt[10]{x}^{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{10 \ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = 10^{10} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10}$$

حساب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}$  : نضع  $t = \sqrt[10]{x}$

إذا كان:  $x \rightarrow +\infty$  فإن:  $t \rightarrow +\infty$  ومنه:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t}$

و بما أن:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = 0 \quad \text{إذن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = 10^{10} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10} = 10^{10} \times 0^{10}$$

3- حساب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$  مباشرة:  $\frac{+\infty}{+\infty}$  شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$$

حساب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$  : نضع  $t = 3x+1$

إذا كان:  $x \rightarrow +\infty$  فإن:  $t \rightarrow +\infty$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t}$

و بما أن:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} = 0$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \frac{3}{2} \times 0 = 0$

**تمرين 28:** تحدد  $f'(x)$  بحيث:  $f(x) = \frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1}$

**الجواب:**  $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left( \frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1} \right)'$$

$$= \frac{(3x^2+1)' \ln(3x^2+1) - (3x^2+1) \ln'(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$